



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

TOK NEWTONSKÉ KAPALINY PRUŽNOU TRUBICÍ

FLOW OF NEWTONIAN LIQUID THROUGH A FLEXIBLE TUBE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Matouš Slonek

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Roman Klas, Ph.D.

BRNO 2021

Zadání bakalářské práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Matouš Slonek**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Roman Klas, Ph.D.**
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Tok newtonské kapaliny pružnou trubicí

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Bakalářská práce bude mít v úvodní části přehledový charakter aplikačních možností uvedeného typu proudění. Na tuto část bude navazovat studie základních rovnic popisujících tok tekutiny, konstitutivních vztahů především hyperelastických materiálů a napětí ve stěně trubice. V závěru budou na jednoduchém případě představeny možnosti jednorozměrné simulace FSI úlohy.

Cíle bakalářské práce:

Student v bakalářské práci popíše hlavní oblasti a případy toku kapaliny pružnou trubicí. Definuje jednorozměrnou pohybovou rovnici newtonské kapaliny a rovnici kontinuity zohledňující deformaci stěny trubice. Provede rešerši konstitutivních materiálových modelů a uskuteční rozbor napětí ve stěně trubice. Pro definované okrajové a počáteční podmínky realizuje základní jednorozměrnou FSI simulaci kruhové trubice konstantní délky.

Seznam doporučené literatury:

BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. Mechanika kontinua. Vyd. 2., opr. Praha: Academia, 2000. ISBN 80-200-0772-5.

NĚMEC, Ivan, Miroslav TRCALA a Václav REK. Nelineární mechanika. Brno: Vysoké učení technické v Brně, nakladatelství VUTIUM, 2018. ISBN 978-802-1455-191.

MACUR, Milan. Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua. V Brně: VUTIUM, 2010. ISBN 978-802-1439-443.

ŠOB, František. Hydromechanika. Brno: CERM, 2002. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-21-2037-5.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá tokem newtonské kapaliny pružnou trubicí. Rešeršní část práce obsahuje popis oblastí výskytu problematiky toku kapaliny pružnou trubicí. Následně jsou probrány rovnice popisující proudění kapaliny v deformovatelné trubici. Na to navazuje popis konstitutivních materiálových modelů. V praktické části práce je realizována jednorozměrná FSI simulace toku kapaliny pružnou trubicí.

Klíčová slova

FSI simulace, pružná trubice, jednorozměrné proudění

Abstract

This bachelor's thesis focuses on the flow of newtonian liquid through a flexible tube. The theoretical part consists of a review of various fields that flexible tube occurs in. In the next chapter were defined equations describing the flow of a liquid through a deformable tube and lastly, constitutive material models were stated. In the practical part, a one-dimensional FSI simulation of the flow of a liquid through a flexible tube was realized.

Key words

FSI simulation, flexible tube, one-dimensional flow

Bibliografická citace

SLONEK, Matouš. *Tok newtonské kapaliny pružnou trubicí* [online]. Brno, 2021 [cit. 2021-03-12]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/132695>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Roman Klas.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci s názvem Tok newtonské kapaliny pružnou trubicí vypracoval samostatně pod vedením Ing. Romana Klasa, Ph.D. s využitím svých znalostí a uvedených zdrojů.

V Brně dne 20.05.2021

Matouš Slonek

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své práce Ing. Romanu Klasovi, Ph.D. hlavně za trpělivost, ochotu, důležité rady a lidský přístup.

Obsah

Úvod	9
1 Pružné trubice	10
1.1 Biomechanika	10
1.1.1 Deformovatelné cévy	10
1.1.2 Šíření vln	11
1.2 Potrubí	11
1.2.1 Hydraulický ráz	11
1.3 Vibrace	13
1.3.1 Reynoldsovo číslo	14
2 Rovnice popisující proudění kapaliny v trubici	16
2.1 Pohybová rovnice kapaliny	17
2.2 Rovnice kontinuity	19
2.3 Pohybová rovnice trubice	20
3 Materiálové charakteristiky trubice	23
3.1 Hookův zákon	23
3.2 Neo-Hookovský materiál	24
3.3 Mooney-Rivlinův materiál	25
4 Jednorozměrná FSI simulace	27
4.1 Zadání	27
4.2 Návrh řešení	28
4.3 Výsledky	29
Závěr	38
Seznam použitých zdrojů	39
Seznam použitých zkratk a symbolů	40
Příloha: Maple kód	43

Úvod

V této práci bude předmětem zájmu proudění newtonské kapaliny pružnou trubicí. To zahrnuje studii vzájemné interakce proudící kapaliny a snadno deformovatelné stěny trubice, označováno zkratkou FSI (Fluid-structure interaction). Autor si vybral uvedené téma z důvodu zájmu o oblast proudění kapalin.

Problematika pružných trubic je hojně řešena v oblasti biomechaniky. Poměrně lehce deformovatelné cévy při průtoku krve mění svůj průměr v závislosti na okolnostech, tato interakce mimo jiné způsobuje změny tlaku, rozrušuje proudění a tvoří tlakové vlny šířící se cévním systémem. Zároveň jsou schopny i zhroucení a tím zabránění průtoku krve úplně. Všechny tyto fenomény ovlivňují tok krve, který je podstatný pro fungování lidského těla, a proto je potřeba rozumět chování tohoto systému. Tyto situace navíc komplikuje reologie krve, to ale nebude řešeno v této práci.

Další oblastí výskytu pružných trubic je potrubí přenášející kapaliny na dlouhé i krátké vzdálenosti. U těchto systémů pružnost potrubí způsobuje fenomény jako hydraulický ráz a vibrace, které vytvářejí zátěž na danou soustavu, a proto je potřeba zohlednit tyto situace při konstrukci.

Pro výše zmíněné účely je využívána FSI simulace, která je schopna nasimulovat zatížení systémů vznikajících při uvedených a dalších situacích. Takto získané informace se poté využijí ke konstruování, k předpovídání nebezpečných situací, k analýze vznikajících problémů atd.

Cílem této práce je uvést oblasti využívání pružných trubic a hlavně představit teoretické základy pro jednorozměrnou FSI simulaci pružné trubice, která bude následně realizována.

1 Pružné trubice

Pružnou trubicí se myslí trubice, u které se stěny deformují tlakem protékající kapaliny. Tato deformace zpětně ovlivňuje parametry proudění kapaliny. Mezi trubicí a kapalinou dochází k přenosu hybnosti a síly při nestacionárním proudění, které způsobují odchylky rychlosti a tlaku v kapalině a deformují trubici. [1]

V této kapitole budou probrány oblasti výskytu a využití pružné trubice.

1.1 Biomechanika

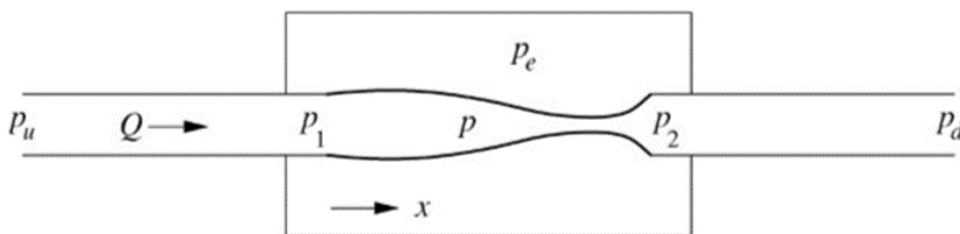
Významnou oblastí výskytu pružných trubic je lidské tělo. Krev proudící v žilách a tepnách deformuje jejich stěny a tím ovlivňuje parametry proudění.

1.1.1 Deformovatelné cévy

U tepen, které rozvádí krev od srdce, je vnitřní tlak většinou podstatně větší než tlak ze vnějšku, takže u nich obvykle nedochází k tak výraznému zmenšení průměru [2]. To znamená, že u nich se nemusíme obávat, že dojde ke zhroucení.

Naopak žíly pracují s menším vnitřním tlakem, takže se stává, že vnější tlak na žílu se velikostí blíží nebo přesahuje ten vnitřní. To způsobuje zmenšení příčného průřezu žíly v krajních případech až k hodnotám blízcím se nule, kdy dojde ke zhroucení žíly. Tento proces může nastat ve velkých žilách vracejících krev do srdce, nebo v žilách zvednuté horní končetiny. Zmenšením příčného průřezu dochází ke zmenšení průtoku. [3]

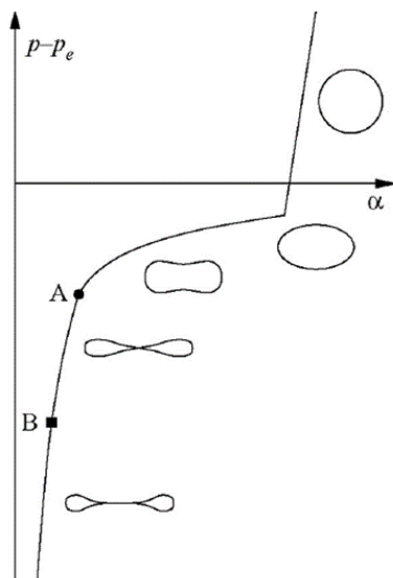
Tento proces je ukázán na experimentu nazvaném Sterlingův rezistor (obr. 1.1). Elastická trubice je upevněna mezi dvě pevné trubice a je uzavřena v oblasti s nastavitelným tlakem p_e . Tok Q tekutiny je tvořen rozdílem tlaků p_u a p_d . Pokud $p_u = p_d$, trubicí neprotéká kapalina a zvětšováním vnějšího tlaku dochází k deformování elastické trubice z kruhového příčného průřezu do eliptického. Po původním zdeformování trubice značně reaguje i na malé zvětšení tlaku p_e a rychle se deformuje až do bodu, kdy se dotknou protější stěny trubice. Napřed v bodě a poté podél přímkou, jak je ukázáno na obr. 1.2. V tomto stádiu už další deformace neprobíhá, protože zdeformovaný tvar trubice klade velký odpor vnějšímu tlaku. Pokud trubicí protéká kapalina (tlak $p_u > p_d$), deformace se napřed začne utvářet na konci elastické trubice z pohledu pohybu tekutiny, kde je vnitřní tlak nejnižší. V tomto systému se objevili silné oscilace a turbulentní proudění. [2]



Obrázek 1.1: Sterlingův rezistor [2].

1.1.2 Šíření vln

Stahem srdečního svalu se pumpuje krev do aorty, tím stoupne vnitřní tlak tepny, roztáhne se její stěna a vzroste i napětí ve stěně. Po uvolnění srdečního svalu klesá vnitřní tlak tepny a roztažená tepna se navrácí ke své původní poloze. Mezitím setrvačnost kapaliny posune kapalinu dále, tím způsobí pokles tlaku v původním místě tepny, který způsobí, že stěna navracející se do původní polohy se nezastaví v této poloze, ale více se stáhne. To způsobí oscilační pohyb. Ve stejnou dobu kapalina roztahuje další část tepny a proces se opakuje. Toto narušení se šíří podél cévního systému v podobě tlakové vlny. Tato vlna se ale nešíří jenom dopředu, část vlny se odráží zpátky v ohybech a větveních. Radiální pohyb stěny doprovázející tlakovou vlnu způsobuje také pohyb stěny ve směru axiálním. Tento pohyb je ale tak zanedbatelný, že neovlivňuje šíření vlny. [4]



Obrázek 1.2: Deformace trubice u Sterlingova resistoru (α je plocha příčného průřezu) [2].

1.2 Potrubí

Potrubí, přenášející nějaký druh kapaliny na dlouhé vzdálenosti jako např. vodovod nebo ropovod, není tolik náchylné na změny svého průměru od protékající kapaliny jako je to u cév v lidském těle, ale to neznamená, že jsou tyto jevy zanedbatelné.

Významným jevem, který se vyskytuje při proudění kapaliny elastickým, ale i tuhým potrubím, je hydraulický ráz.

1.2.1 Hydraulický ráz

Hydraulický ráz vzniká při nestacionárním proudění stlačitelné kapaliny potrubím, když dojde ke změně rychlosti proudění např. zavřením ventilu. Na příkladu bude uvažováno velmi rychlé zavření ventilu v pružném potrubí, to znamená že rychlost kapaliny před ventilem bude téměř okamžitě rovna nule. Tímto se vnitřní energie kapaliny zvýší (nárůst tlaku) oproti původní velikosti o hodnotu Δp . To způsobí dvě věci; zvýší se vnitřní tlak

kapaliny, který způsobí radiální roztažení potrubí a zároveň stlačení kapaliny. Zvýšení tlaku kapaliny způsobí vznik tlakové vlny šířící se proti původnímu směru toku rychlostí zvuku c :

$$c = k \cdot c_t \quad (1.1)$$

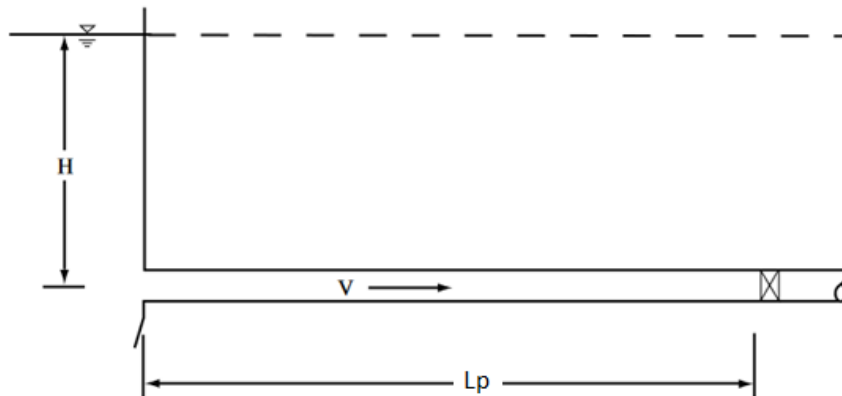
Kde c_t je teoretická rychlost zvuku:

$$c_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (1.2)$$

a k je konstanta vyjadřující pružnost potrubí (pro tenkostěnné ocelové potrubí):

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{K \cdot d}{E \cdot s}}} \quad (1.3)$$

Kde K je modul stlačitelnosti kapaliny, E je modul pružnosti v tahu, d je vnitřní průměr potrubí a s je tloušťka stěny potrubí. Tlaková vlna putuje dále, svým šířením stlačuje kapalinu a roztahuje potrubí v místech, kde projde, dokud neuraží vzdálenost L_p (obr. 1.3) a nenarazí na napojení potrubí na nádrž stojaté vody, kde je dán tlak kapaliny výškou vodního sloupce H . Odtud se tlaková vlna odráží nazpět a míří k ventilu, a zároveň voda začne proudit směrem do nádrže, protože v ní je menší vnitřní tlak o hodnotu Δp než v potrubí. Od uzavřeného ventilu se tlaková vlna opět odráží, ale tentokrát jako záporná vlna, která je menší o Δp oproti původní hodnotě. Šíření záporné vlny doprovází podtlak, expanze kapaliny a smrštění potrubí. Ve chvíli, kdy záporná vlna doputuje k nádrži, je rychlost kapaliny všude nulová. Vlna se opět odráží, a protože je momentálně v nádrži větší vnitřní tlak než v potrubí, začne kapalinu proudit směrem k ventilu. Takto by se děj opakoval do nekonečna, pokud by nebyly přítomny hydraulické ztráty. [5]



Obrázek 1.3: Příklad hydraulického rázu. Upraveno dle [5].

Rozlišují se dva druhy vodního rázu; totální hydraulický ráz, který byl teď rozebrán na příkladě, a částečný hydraulický ráz. Jaký z těchto dvou případů se objeví záleží na rychlosti zavírání ventilu T_s a na době návratu odrážené tlakové vlny T_r (doba reflexe), kdy:

$$T_r = \frac{2 \cdot L_p}{c} \quad (1.4)$$

Pokud v době návratu tlakové vlny k ventilu je ventil úplně uzavřen ($T_s \leq T_r$), tak dojde k totálnímu rázu. Nárůst tlaku při totálním hydraulickém rázu je dán Žukovského vztahem:

$$\Delta p = \rho \cdot c \cdot \Delta v \quad (1.5)$$

Částečný ráz vznikne, pokud při návratu tlakové vlny k ventilu není ventil úplně dovržen ($T_r \geq T_r$) a pořád protéká určitý objem kapaliny. Popis proudění při částečném hydraulickém rázu je dán diferenciálními rovnicemi hydraulického rázu tzv. vlnovou rovnicí:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0 \quad (1.6)$$

Hydraulický ráz je nebezpečný z více hledisek. Namáhá potrubí přetlakem i podtlakem, takže potrubí musí být dimenzováno na oba jevy. Přetlak je nebezpečný kvůli možnému strukturálnímu poškození potrubí a hydraulických součástí a strojů (ventilů, čerpadel, ...). Dále může způsobovat vibrace a hluk, praskliny z únavy materiálu a při porušení celistvosti potrubí hrozí kontaminace životního prostředí při přepravě přírodě nebezpečného materiálu. Podtlak může způsobit strukturální poškození v podobě zhroucení, dále poškození hydraulických součástí a strojů, vibrace a hluk, praskliny z únavy materiálu a kontaminaci přepravované pitné vody z důvodu nasátí nečistot z okolí do poškozeného potrubí. [6]

Při totálním rázu v potrubí dochází k výrazným změnám tlaku, které mohou způsobit uvedené problémy, takže je ideální se mu úplně vyvarovat např. pomalým zavíráním ventilu, nebo přidáním konstrukcí do systému jako je větrník, přeliv, nebo vyrovnávací zařízení, které způsobí pouze částečný ráz.

1.3 Vibrace

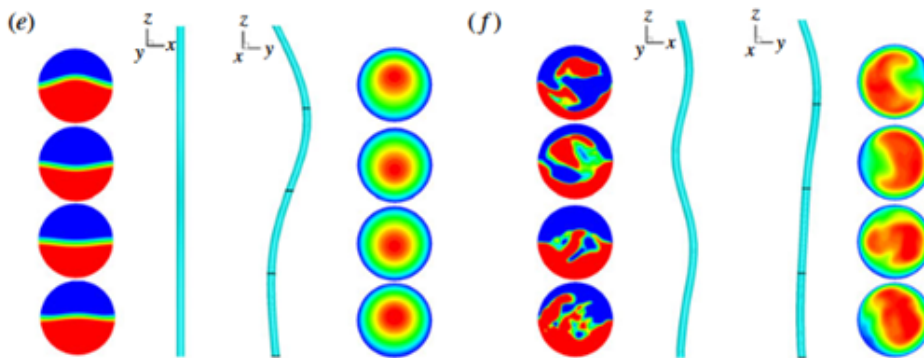
Potrubí přenášející kapaliny jsou běžně využívány v oblastech jako domovní instalace, ropný průmysl, výměníky tepla, jaderné a tepelné elektrárny a další... Proudění bývá turbulentní a potrubí většinou dlouhé a pružné (vyrobeno z kovu nebo plastu), způsobující vibrace od průtoku kapaliny, které mohou dále rozrušovat proudění a samotné potrubí.

Pittardem a dalšími byl na toto proveden experiment, kdy byly zkoumány vibrace tvořené turbulentním prouděním. Při turbulentním proudění pohybem kapaliny v mezní vrstvě vznikají víry, které odebírají energii z hlavního proudu a rozptylují ji do okolí. Tento proces se děje v úzkém pásu mezní vrstvy v blízkosti stěny potrubí. Rozptylování energie způsobuje velké ztráty kinetické energie kapaliny. Přesouváním kapaliny v podobě vírů dochází k přeměně kinetické energie kapaliny na teplo a na potenciální energii v podobě tlaku. Tyto změny tlaku způsobují vznik vibrací daného potrubí, které svým pohybem způsobuje další odchylky tlaku v kapalině. Tato vzájemná interakce způsobuje takzvané prouděním tvořené vibrace.

V experimentu byli použity různé velikosti průtoku, potrubí různých průměrů a tři materiály potrubí; nerezová ocel, hliník a PVC. Zjistili, že vibrace vzrůstají se zvětšující se hodnotou průtoku, dále že vibrace se zvětšují se zmenšujícím se průměrem potrubí a nakonec, že vibrace byly menší u potrubí s větší hustotou. To znamená, že nejmenší vibrace se objevili u potrubí z nerezové oceli, největší vibrace byly u potrubí z PVC a vibrace hliníkového potrubí byly velikostně mezi předchozími materiály.

Při malých průtocích jsou prouděním tvořené vibrace téměř zanedbatelné, ale se vzrůstající velikostí průtoku vibrace narůstají skoro kvadraticky a stávají se tak jevem, který se nedá přehlížet. [7]

Xiem a dalšími byl proveden experiment nazvaný nestálost zahradní hadice. Zahradní hadicí se myslí pružná trubice, u které pohyb při menším průtoku připomíná sinusoidu, jak lze pozorovat na obyčejné zahradní hadici. Autoři zkoumali vliv napětí kapaliny (fluid-tension), rychlost kapaliny a Reynoldsova čísla Re na vznik pohybů pružné trubice, která je schopna vibrovat při průtoku kapaliny. Zjistili, že obecně je vliv Reynoldsova čísla důležitější na změny odezvy trubice než zbylé dvě veličiny, zato rychlost kapaliny a napětí kapaliny ovlivňují amplitudu vibrací. Při malém Re o hodnotě 740 je tok stabilní a symetrický podle osy x . Při větším Re o hodnotě 1330 už neexistuje symetrie toku a objevuje se dobře promíchaný tok v kolmých plochách (z - x , z - y) na směr toku. Na obr. 1.4 můžeme vidět, že při malém Re je pohyb trubice jen ve směru osy y , na rozdíl od směru osy x , kde je pohyb nulový. Naopak při větším Re je pohyb trubice ve směru osy x dokonce výrazně větší než ve směru osy y . Je zřejmé, že hodnota Reynoldsova čísla značně ovlivňuje změnu dynamické odezvy trubice na proudění, a to z pohybu v rovině do kombinovaného pohybu; v rovině a vně roviny. Oba případy jsou pozorovány v tomto experimentu, ale převládá případ s větším Re , protože se v praxi vyskytuje častěji. [8]



Obrázek 1.4: Výchylinky trubice při $Re = 740$ (e) a $Re = 1330$ (f) [8].

1.3.1 Reynoldsovo číslo

Reynoldsovo číslo Re je bezrozměrné číslo, které udává poměr mezi setrvačnými silami a viskózními silami. Je definované jako:

$$Re = \frac{v_s \cdot l}{\nu} \quad (1.7)$$

Kde v_s je střední rychlost v profilu, l je charakteristický rozměr průtočného profilu a ν je kinematická viskozita. Reynoldsovo číslo ukazuje, jestli bude proudění laminární nebo turbulentní. Jak už bylo zmíněno, předmětem zájmu bude spíše turbulentní proudění, které se vyskytuje častěji. Při velkém Re jsou setrvačné síly natolik větší než viskózní síly, že viskozita nedokáže zastavit náhodné a prudké fluktuace kapaliny, a to znamená, že proudění je v tomto případě turbulentní. Turbulentní proudění se vyznačuje nepravidelným pohybem částic kapaliny a tím je matematický přístup velmi obtížný. Naopak u malého Re jsou viskózní síly dostatečně velké nato, aby potlačili fluktuace kapaliny a tím je proudění uhlazené neboli laminární, které se vyznačuje vrstvami kapaliny tekoucí jedna po druhé bez vzájemného míchání.

Kritická hodnota Re_k udává přechod mezi laminárním a turbulentním prouděním. Pro trubici kruhového průřezu je Re_k rovna 2320. Tato hodnota je ale spíše teoretická, v praxi je kritická hodnota ovlivňována drsností povrchu trubice, vibracemi trubice a fluktuacemi na přítoku. Takže z praktického hlediska se někdy uvádí pozměněné rozdělení;

$$\begin{array}{ll} Re \lesssim 2300 & \text{laminární proudění} \\ 2300 \lesssim Re \lesssim 4000 & \text{přechodné proudění} \\ Re \gtrsim 4000 & \text{turbulentní proudění} \end{array}$$

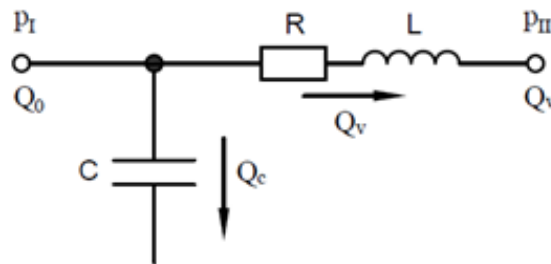
Přechodné proudění znamená nepravidelné střídání proudění mezi laminárním a turbulentním. Zároveň je ale možné udržet laminární proudění i při mnohem větším Re , a to pomocí hladkého povrchu trubice, zabráněním vibrací a zajištěním stabilního přítoku. [9]

Jak můžeme vidět na obr. 1.4, v tomto případě naopak nastává přechod na turbulentní proudění dříve než na kritické hodnotě Reynoldsova čísla 2320. Vibrace trubice sníží tuto kritickou hodnotu a už při $Re = 1330$ lze vidět vyvinuté víry a míchání vrstev kapaliny.

2 Rovnice popisující proudění kapaliny v trubici

Tato kapitola bude věnována základním rovnicím popisujícím proudění kapaliny pružnou trubicí. Pomocí těchto rovnic se následně provede FSI simulace.

Složitost rovnic závisí na typu modelu. Modely existují jednorozměrný, dvourozměrný a třírozměrný. Jednorozměrný soustředěný model využívající elektrohydraulické analogie (v literatuře někdy označován jako 0-rozměrný) se charakterizuje tím, že jsou základní veličiny popisující proudění kapaliny (tlak p , průtok Q , objem V) soustředěny do určitého místa, podobně jako elektrické součástky v elektrickém obvodu. Takže jako v hydraulickém systému tlak v trubici způsobuje tok kapaliny, proti kterému působí hydraulické ztráty, tak analogicky v elektrickém obvodu napětí způsobuje tok proudu proti účinkům el. odporu. Základními veličinami tohoto modelu jsou hydraulická kapacita C , indukčnost L a odpor R . Složitost modelu se poté odvíjí od počtu těchto veličin. Tyto veličiny jsou poté uvažovány jako průměrné hodnoty v dané části systému. Z toho je rovnou jasné, že přesnost výsledků tohoto modelu nemůže být vysoká. Na druhou stranu pro tento model hraje jednoduchost výpočtu. Základní podoba tohoto modelu je ukázána na obr. 2.1.



Obrázek 2.1: RLC model. Přejato [10].

Využitím Kirchhoffových zákonů se sestaví rovnice pro velikosti průtoku a tlaku:

$$p_I - p_{II} = R \cdot Q_v^2 + L \frac{dQ_v}{dt} \quad (2.1)$$

$$Q_0 = Q_v + C \frac{dp_I}{dt} \quad (2.2)$$

Veličiny L a R jsou definovány obvyklými vztahy, pouze kapacita má speciální definici obsahující korigovaný modul objemové stlačitelnosti K_c :

$$C = \frac{V}{K_c} \quad (2.3)$$

Model bývá využíván pro modelování lidské oběhové soustavy, zejména dynamiky kardiiovaskulárního systému, ke změnám tlaku a průtoku v tomto systému. Dále může model posloužit k určení okrajových podmínek pro třírozměrné modely. Elektrohydraulické modely pro oběhovou soustavu se vyskytují od základní jednoduché RLC kombinace, která popisuje cévní systém jako celek, až po rozsáhlé modely, kdy je přidáváním RLC prvků zastoupena každá významná céva lidského těla zvlášť. Další využití modelu je k simulaci srdce jako čerpadla, kdy jeden značně používaný model využívá proměnlivé elasticity srdečních komor. [11]

Více využívané jsou vícerozměrné rozložené modely uvažující změny základních veličin v jakémkoli místě systému, proto jsou řešeny sérií parciálních diferenciálních rovnic. To znamená větší přesnost výsledků, ale na úkor zvýšené obtížnosti výpočtu. Proto, i když je třírozměrný model schopen kompletně nasimulovat proudění v daném systému, tak kvůli náročnosti na výpočetní zařízení se tento model vždy nevyplatí. Takže když stačí znát vývoj základních veličin podél proudnice, může přijít na řadu jednorozměrný model, který je na tohle uzpůsoben a zároveň není výpočetně náročný. Proto bude věnována pozornost jednorozměrnému modelu využívajícímu rozložený přístup.

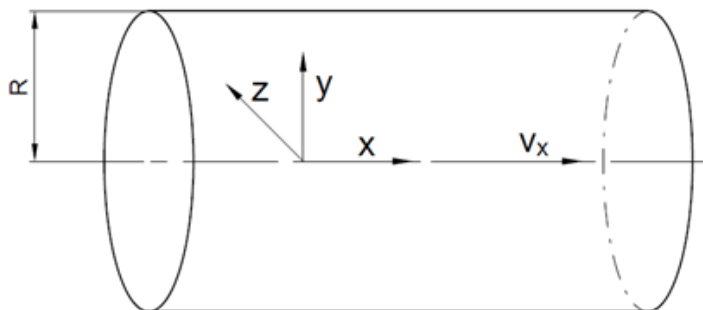
Jednorozměrný model se skládá z dvou rovnic pro tok kapaliny, a to z upravené Navier-Stokesovy rovnice a rovnice kontinuity. Nakonec je součástí modelu rovnice pro pohyb stěny trubice. Tyto rovnice budou dále rozebrány.

2.1 Pohybová rovnice kapaliny

První rovnice popisující tok kapaliny je jednorozměrná pohybová rovnice vycházející z upravené Navier-Stokesovy rovnice. Navier-Stokesova rovnice vyjadřuje druhý Newtonův zákon pro tok nestlačitelné viskózní kapaliny ve tvaru:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} = \vec{a} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad (2.4)$$

Kde oba členy na levé straně rovnice vyjadřují složky zrychlení od setrvačné síly, první člen na pravé straně rovnice je zrychlení od vnějších sil, další člen vyjadřuje vliv tlakových sil a poslední člen vyjadřuje třecí síly při pohybu viskózní kapaliny.



Obrázek 2.2: Schéma trubice jednorozměrného modelu. Překresleno dle [12].

Při tvorbě jednorozměrného modelu se využije následujících předpokladů:

1. Osová souměrnost: veličiny jsou nezávislé na úhlové poloze, zároveň trubice má v každé poloze kruhový průřez, takže poloměr trubice R je závislý pouze na poloze x a čase t .
2. Stěna trubice se pohybuje pouze v radiálním směru (podél osy y).
3. Konstantní tlak na celé ploše daného průřezu trubice, takže závisí jenom na hodnotách x a t .
4. Převaha osových rychlostí: rychlosti kapaliny ve směrech kolmých na osu x jsou zanedbatelné, takže se uvažuje pouze rychlost v_x . [12]

Využitím těchto předpokladů se předchozí rovnice změní pro potřeby jednorozměrného modelu na:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x \quad (2.5)$$

Použitím této rovnice jako výchozí a derivováním s využitím uvedených předpokladů se přijde na jednorozměrnou pohybovou rovnici kapaliny:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) = -\frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + K_r \left(\frac{Q}{S} \right) \quad (2.6)$$

Kde α je Coriolisův koeficient:

$$\alpha = \frac{\int_S \xi^2 d\gamma}{S} \quad (2.7)$$

Tento koeficient upravuje průměrnou hodnotu průtoku tak, aby se více blížila reálné hodnotě, a tím byly výsledky z jednorozměrné pohybové rovnice přesnější. Koeficient závisí především na rychlostním profilu toku ξ . Rychlostní profil se odvíjí od druhu proudění, pro parabolický profil odpovídající Poiseuilleho proudění v kruhovém potrubí se rychlostní profil rovná $\xi(y) = 2(1 - y^2)$, kde y je vzdálenost od osy. V tomhle případě vychází $\alpha = \frac{4}{3}$. Pro plně rozvinuté turbulentní proudění vychází $\alpha \approx 1,02$, který je velmi blízký hodnotě 1 a proto se v případech může zanedbat. Při proudění krve v tepnách byla zjištěna hodnota $\alpha \approx 1,1$. Tento koeficient se za normálních okolností mění v závislosti na poloze a čase, ale v tomto modelu je uvažován jako konstanta, v důsledku uvedeného předpokladu 4. Veličina K_r v rovnici (2.6) označuje parametr vyjadřující tření kapaliny závisící na kinematické viskozitě. Pro parabolický profil vychází [12]:

$$K_r = 8 \pi \nu \quad (2.8)$$

Tvarů jednorozměrných pohybových rovnic je hodně, a proto bude uveden další tvar založený na průtoku. Tento tvar opět vychází z Navier-Stokesovy rovnice a vypadá takto:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{2Q}{r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \left(\rho g - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{f_q}{2r} \frac{Q|Q|}{2S^2} \right) \quad (2.9)$$

Kde f_q vyjadřuje koeficient tření kapaliny o stěnu trubice. Tento koeficient může být například Darcyho koeficient tření, který lze určit z Moodyho diagramu. [10]

Jednorozměrnou pohybovou rovnici lze také vyjádřit na základě rychlosti a zahrnutím členu obsahujícím parciální derivaci průřezu vzniká tato rovnice pro pružnou trubicí:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left(b v + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + g \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left(b v + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + g \quad (2.11)$$

Tvary pohybové rovnice jsou uvedeny dva, protože první z nich obsahuje konvektivní člen (člen s parciální derivací rychlosti podle polohy) a druhý ne. Součinitel b vyjadřuje třecí síly a je zvolen podle typu proudění. Pro tuto práci je zvolen pro turbulentní proudění:

$$b = \frac{\rho}{4R} f_q v \quad (2.12)$$

2.2 Rovnice kontinuity

Další rovnicí je rovnice kontinuity vyjadřující zákon zachování hmotnosti. Rovnice kontinuity pro tuhou trubicí v diferenciálním tvaru vypadá takto:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla v = 0 \quad (2.13)$$

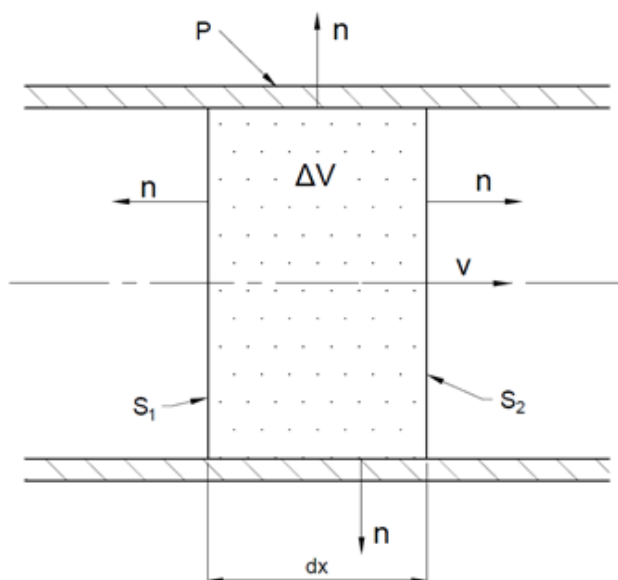
Pokud by se uvažovala nestlačitelná kapalina ($\rho = \text{konstantní}$), rovnice se zredukuje na:

$$\nabla v = 0 \quad (2.14)$$

Rovnice kontinuity pro pružnou trubicí a nestlačitelnou kapalinu se často v literatuře objevuje ve tvaru:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

Kde S je plocha příčného průřezu trubice a Q je průtok. V této práci bude pracováno s rovnicí pro pružnou trubicí a stlačitelnou kapalinu. Odvození této verze rovnice kontinuity je podrobně popsáno ve [13], zde bude uvedeno jen zkráceně.



Obrázek 2.3: Schéma kontrolního objemu trubice. P značí plášť trubice, S_1 a S_2 jsou myšlené hranice, n je jednotkový normálový vektor a ΔV je uvažovaný objem kapaliny. Překresleno dle [13].

Jak bylo řečeno, rovnice vychází ze zákona zachování hmotnosti:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V(t)} \rho dV = 0 \quad (2.16)$$

Využitím věty o střední hodnotě integrálního počtu a Gauss-Ostrogradského věty vznikne:

$$\frac{d}{dt} [\rho(\alpha)] \Delta V + \rho(\alpha) \int_{S(t)} v n dS = 0 \quad (2.17)$$

Dále využitím znalostí:

$$\int_{S(t)} v n \, dS = Q_2 - Q_1 + \int_P v n \, dS \quad (2.18)$$

a

$$\Delta V(t) = S(x, t) \, dx \quad (2.19)$$

, lze rovnici (2.17) upravit na:

$$\frac{d\rho(\alpha)}{dt} S(t) + \rho(\alpha) \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho(\alpha) \frac{\int_P v n \, dS}{dx} = 0 \quad (2.20)$$

Tato rovnice může sloužit jako finální tvar, ale z praktických důvodů ještě pomůže vyjádřit hustotu ρ pomocí tlaku p :

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (2.21)$$

Dosažením vzniká tvar rovnice kontinuity, která uvažuje stlačitelnost kapaliny i deformaci trubice:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dp(\alpha)}{dt} S(t) + \rho(\alpha) \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho(\alpha) \frac{\int_P v n \, dS}{dx} = 0 \quad (2.22)$$

První dva členy odpovídají běžně udávané rovnici (2.13), a navíc je třetí člen, který uvažuje pohyb pláště trubice. Pokud by plášť trubice byl absolutně tuhý, to znamená že by se nemohl pohybovat ($v = 0$), celý člen by samozřejmě byl roven nule. V tomto případě se musí tento člen určit z analýzy deformace trubice.

2.3 Pohybová rovnice trubice

Opět je využito odvození z [13] pro Hookovský materiál tenkostěnného tělesa. Vychází se z rovnice rovnováhy stěny trubice, kdy na vnitřním povrchu musí být splněny vazbové podmínky:

$$\Sigma_{ij} m_j = \sigma_{ij} m_j \quad (2.23)$$

Ale protože ze vnějšku na trubicí nepůsobí žádné síly, člen na levé straně je roven nule a zůstane pouze člen vyjadřující vnitřní síly od kapaliny. Dále využitím znalosti $\sigma_{ij} m_j = p n_i$ a použitím věty Gauss-Ostrogradského se přijde na rovnici:

$$\int_{V_T} \Sigma_{ij} v_{ij} \, dV = \int_P p v_i n_i \, dS \quad (2.24)$$

Kde Σ_{ij} je tenzor napětí a v_{ij} je tenzor rychlosti deformace. Protože se uvažuje zatížení trubice pouze tlakem, v tomto případě je využita střední hodnota tlaku na plášti trubice \tilde{p} , bude tenzor napětí úměrný tlaku a tenzor rychlosti deformace úměrný derivaci tlaku. Tímto vyjde:

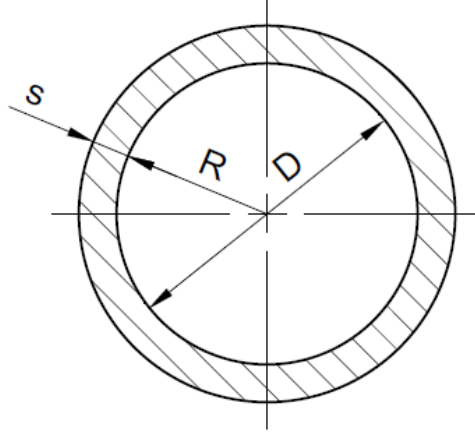
$$\frac{d\tilde{p}}{dt} \int_{V_T} S_{ij} w_{ij} \, dV = \int_P v n \, dS \quad (2.25)$$

Touto rovnicí se zjistil neznámý integrál v rovnici kontinuity (2.20). Ale pro lepší srozumitelnost lze integrál dále upravit. Kvůli zatížení trubice pouze vnitřním tlakem vzniká pouze jednoosá napjatost, takže:

$$\Sigma_{ij} v_{ij} = \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.26)$$

Ta se skládá z normálového napětí σ a z časové derivace relativního prodloužení ε . To je dáno jako:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{R}{E s} p \quad (2.27)$$



Obrázek 2.4: Schéma průřezu trubice. Překresleno dle [13].

Derivováním podle času vznikne:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{R}{E s} \frac{dp}{dt} \quad (2.28)$$

Dosazením posledních rovnic do (2.25) a integrováním, kdy $V_T = 2\pi R s dx$, se dostane tato upravená rovnice pro pohyb stěny trubice:

$$\frac{D}{E s} S \frac{dp}{dt} dx = \int_P v n dS \quad (2.29)$$

Teď už jen zbývá dosadit tuto rovnici do odvozené rovnice kontinuity (2.22) a použitím znalosti $K = \rho(\alpha) v^2$ a substanciální derivace se přijde na:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{S}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{K} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

Tato rovnice je finální rovnice kontinuity pro stlačitelnou kapalinu i deformaci trubice jednoosou napjatostí. V odvození se neuvažovaly setrvačné síly trubice, protože jsou zanedbatelné oproti elastickým silám.

Pro porovnání je uveden ještě druhý přístup odvození rovnice kontinuity pro deformaci trubice, který uvažuje pouze rychlost ve směru osy trubice. Vyjde se ze zákona zachování hmoty:

$$\frac{d\Delta M}{dt} = 0 \quad (2.31)$$

Kde ΔM je hmota uvažovaného kontrolního objemu ΔV . Po dalších úpravách vychází:

$$\frac{1}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.32)$$

Finální forma rovnice kontinuity, kde je vyjádřena závislost poloměru trubice na vnitřním tlaku:

$$S \left(\frac{1}{K} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{K} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.33)$$

Rozměr r_1 je roven poloměru R v obr. 2.4. Z poslední rovnice se členy v závorce dají vytknout jako veličina vyjadřující korigovaný modul objemové stlačitelnosti zahrnující stlačitelnost kapaliny a deformaci trubice K_c :

$$\frac{1}{K_c} = \left(\frac{1}{K} + \frac{2}{r_1} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial t}}{\frac{\partial p}{\partial t}} \right) \quad (2.34)$$

Rovnici kontinuity lze opět místo průtoku vyjádřit pomocí rychlosti:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{K} \frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{1}{K} + \frac{2}{r} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial t}}{\frac{\partial p}{\partial t}}} \quad (2.35)$$

Tímto byly probrány rovnice týkající se proudění kapaliny zohledňující pohyb trubice. Pro vytvoření základu pro jednorozměrnou FSI simulaci zbývá představit konstitutivní vztahy materiálových modelů trubice, zejména hyperelastických materiálů.

3 Materiálové charakteristiky trubice

V této kapitole budou probrány materiálové modely pro trubice dovolující značné deformace. Napřed bude ukázán pro srovnání lineární Hookův zákon, na který budou navazovat pro tuto práci stěžejní hyperelastické materiálové modely, a to Mooney-Rivlinův model a Neo-Hookovský model. Hyperelastické materiály se vyznačují tím, že nedochází k disipaci energie při deformaci. Takže práce vynaložená na deformaci materiálu se v tělese uchovává ve formě potenciální energie elastické napjatosti.

3.1 Hookův zákon

Jak bylo řečeno, prvotně je představen Hookův zákon popisující lineární napětově-deformační chování materiálu pro porovnání s hyperelastickými materiály. Je využito odvození z [10].

Radiální a tečná poměrná deformace, které jsou podstatné pro vyjádření napětí, jsou definovány jako:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (3.1)$$

Deformace v axiálním směru není představena, protože je nulová. Rozšířená forma Hookova zákona pro radiální a tečné napětí:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)\varepsilon_r + \mu(\varepsilon_t + \varepsilon_a)] \quad (3.2)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)\varepsilon_t + \mu(\varepsilon_r + \varepsilon_a)] \quad (3.3)$$

Kde μ vyjadřuje Poissonovo číslo. Posunutí v axiálním směru je také nulové, protože trubice je na obou koncích vetknutá, takže její délka je neměnná. Díky tomu je nulová i axiální deformace, ale axiální napětí σ_a nulové není. Posunutí v radiálním a axiálním směru jsou tedy dána:

$$u_1(r_1) = \frac{r_1}{E} [\sigma_t(r_1) - \mu(\sigma_r(r_1) + \sigma_a)] \quad (3.4)$$

$$u_2(r_2) = \frac{r_2}{E} [\sigma_t(r_2) - \mu(\sigma_r(r_2) + \sigma_a)] \quad (3.5)$$

$$u_a(L) = \frac{L}{E} [\sigma_a - \mu(\sigma_t(r) + \sigma_r(r))] = 0 \quad (3.6)$$

Kde r_1 je vnitřní poloměr trubice a r_2 je vnější poloměr. Dále se hodí vyjádřit změnu vnitřního poloměru trubice v závislosti na vnitřním tlaku p_1 , který je uvažován jako relativní tlak vůči atmosférickému tlaku:

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} = \frac{r_1}{E(r_2^2 - r_1^2)} (r_1^2 + r_2^2 + \mu(r_2^2 - r_1^2)) \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (3.7)$$

Pro definici korigovaného modulu objemové stlačitelnosti pro silnostěnné těleso je uvažováno nulové axiální napětí:

$$K_c = \frac{K}{1 + \frac{2K}{E} \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right)} \quad (3.8)$$

Protože Hookův zákon není ideální konstitutivní model pro pružné trubice, přichází na řadu vhodnější hyperelastické materiálové modely.

3.2 Neo-Hookovský materiál

Neo-Hookovský materiál spadá do kategorie hyperelastických materiálů. Hyperelastické materiály se vyznačují tím, že napětově-deformační chování je popsáno funkcí potenciální energie elastické napjatosti, na rozdíl od lineárních elastických materiálů, kde je popsáno konstantou. Hodí se pro popis materiálů s velkými deformacemi. Hyperelastické materiály jsou například elastomery nebo lidská tkáň. Materiálový model byl představen Rivlinem v [14].

Pro popis materiálového modelu budou uvažovány vztahy pro silnostěnné materiály. Pro nestlačitelnost materiálu je dána podmínka:

$$\lambda_r \lambda_t \lambda_a = 1 \quad (3.9)$$

Kde λ je protažení materiálu, které je ve vztahu s poměrnou deformací dáno:

$$\lambda = \varepsilon + 1 \quad (3.10)$$

Dále je uvažována vetknutá trubice na obou koncích, takže není možné axiální protažení na vnitřním i vnějším poloměru:

$$\lambda_{a1} = \lambda_{a2} = 1 \quad (3.11)$$

Dosazením předchozí rovnice do (3.9) vznikne závislost mezi radiálním a tečným protažením:

$$\lambda_r = \frac{1}{\lambda_t} = \frac{1}{1 + \frac{u}{r_0}} = \frac{r_0}{r} \quad (3.12)$$

A zároveň se předpokládá, že axiální napětí v polovině délky trubice je stejné na vnitřním i vnějším poloměru:

$$\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = \sigma_a \quad (3.13)$$

Stěžejní vztahy (3.14)(3.15) udávají interakci mezi radiálními a axiálními napětími. V tomto případě jsou rovnou rozepsány pro vnější a vnitřní poloměr trubice. C_{12} je materiálová konstanta, která se určuje experimenty.

$$\sigma_{r1} - \sigma_{a1} = 2 C_{12} (\lambda_{r1}^2 - \lambda_{a1}^2) \quad (3.14)$$

$$\sigma_{r2} - \sigma_{a2} = 2 C_{12} (\lambda_{r2}^2 - \lambda_{a2}^2) \quad (3.15)$$

Další vztah udává závislost mezi radiálními napětími:

$$\sigma_{r2} - \sigma_{r1} = 2 C_{12} (\lambda_{r2}^2 - \lambda_{r1}^2) \quad (3.16)$$

Výpočet axiálního napětí na vnitřním i vnějším povrchu trubice s tím, že vnější tlak p_2 je roven nule, a proto v případě vnějšího axiálního napětí tento člen vypadne:

$$\sigma_{a1,2} = -p_{1,2} - 2 C_{12}(\lambda_{r1,2}^2 - \lambda_{a1,2}^2) \quad (3.17)$$

Tečné napětí se následně vypočítá:

$$\sigma_{t1,2} = \sigma_{a1,2} + 2 C_{12}(\lambda_{t1,2}^2 - \lambda_{a1,2}^2) \quad (3.18)$$

Radiální napětí v těchto rovnicích jsou definována jako $\sigma_{r1} = -p_1$ a $\sigma_{r2} = 0$. Tlak p_1 je opět uvažován jako relativní. Využitím uvedených znalostí a vyjádřením protažení pomocí poloměrů trubice lze poslední vztah upravit pro lepší názornost na:

$$\frac{p_1}{2 C_{12}} = \frac{r_{20}^2}{r_2^2} - \frac{r_{10}^2}{r_1^2} \quad (3.19)$$

Pomocí podmínek nestlačitelnosti materiálu a vetknutí trubice na obou koncích se získá vztah pro závislost mezi vnějším a vnitřním poloměrem trubice:

$$r_2^2 = r_1^2 + r_{20}^2 - r_{10}^2 \quad (3.20)$$

Opět je vhodné vyjádřit změnu vnitřního poloměru trubice v závislosti na tlaku p_1 :

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial t}}{4 r_1 C_{12} \left(\frac{r_{10}^2}{r_1^4} - \frac{r_{20}^2}{r_2^4} \right)} \quad (3.21)$$

U korigovaného modulu objemové stlačitelnosti pro silnostěnný materiál lze vidět, že vychází z (2.33), (2.34) a předchozí rovnice:

$$K_c = \frac{K}{1 + \frac{K}{2 r_1^2 C_{12} \left(\frac{r_{10}^2}{r_1^4} - \frac{r_{20}^2}{r_2^4} \right)}} \quad (3.22)$$

Tímto to byl představen díky své jednoduchosti mezi hyperelastickými materiály oblíbený Neo-Hookovský materiálový model. Dále bude uveden původní hyperelastický materiál.

3.3 Mooney-Rivlinův materiál

Mooney-Rivlinův materiál, popsán v [15], je předchůdce Neo-Hookovského materiálu, proto je mu značně podobný ve způsobu popisu, Neo-Hookovský model je v podstatě zjednodušením tohoto modelu. Hodí se pro popis více nelineárních materiálů. Při odvozování budou využity mnohé stejné předpoklady jako u předchozího materiálového modelu. Opět jsou významné rovnice udávající interakci mezi radiálními a axiálními napětími:

$$\sigma_{r1} - \sigma_{a1} = 2 C_1(\lambda_{r1}^2 - \lambda_a^2) - 2 C_2 \left(\frac{1}{\lambda_{r1}^2} - \frac{1}{\lambda_a^2} \right) \quad (3.23)$$

$$\sigma_{r2} - \sigma_{a2} = 2 C_1 (\lambda_{r2}^2 - \lambda_a^2) - 2 C_2 \left(\frac{1}{\lambda_{r2}^2} - \frac{1}{\lambda_a^2} \right) \quad (3.24)$$

Pomocí znalostí o radiálním napětí a radiálním a axiálním protažení z předchozí kapitoly se rovnice upraví na:

$$-p_1 = \sigma_{a1} + 2 C_1 \left(\frac{r_{10}^2}{r_1^2} - 1 \right) - 2 C_2 \left(\frac{r_1^2}{r_{10}^2} - 1 \right) \quad (3.25)$$

Další úpravou se vyjádří tlak pomocí poloměrů trubice:

$$p_1 = 2 C_1 \left(\frac{r_{20}^2}{r_2^2} - \frac{r_{10}^2}{r_1^2} \right) - 2 C_2 \left(\frac{r_2^2}{r_{20}^2} - \frac{r_1^2}{r_{10}^2} \right) \quad (3.26)$$

Vztahy pro tečné napětí jsou ve tvaru:

$$\sigma_{t1} = \sigma_{a1} + 2 C_1 \left(\frac{r_1^2}{r_{10}^2} - 1 \right) - 2 C_2 \left(\frac{r_{10}^2}{r_1^2} - 1 \right) \quad (3.27)$$

$$\sigma_{t2} = \sigma_{a2} + 2 C_1 \left(\frac{r_2^2}{r_{20}^2} - 1 \right) - 2 C_2 \left(\frac{r_{20}^2}{r_2^2} - 1 \right) \quad (3.28)$$

Vyjádření závislosti změny vnitřního poloměru trubice na relativním tlaku p_1 :

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial t}}{4 r_1 \left[C_1 \left(\frac{r_{10}^2}{r_1^4} - \frac{r_{20}^2}{r_2^4} \right) + C_2 \left(\frac{1}{r_{10}^2} - \frac{1}{r_{20}^2} \right) \right]} \quad (3.29)$$

Korigovaný modul objemové stlačitelnosti pro silnostěnný materiál:

$$K_c = \frac{K}{1 + \frac{K}{2 r_1^2 \left[C_1 \left(\frac{r_{10}^2}{r_1^4} - \frac{r_{20}^2}{r_2^4} \right) + C_2 \left(\frac{1}{r_{10}^2} - \frac{1}{r_{20}^2} \right) \right]}} \quad (3.30)$$

U všech třech materiálových modelů byly odvozeny důležité rovnice pro změnu vnitřního poloměru trubice a rovnice korigovaného modulu objemové stlačitelnosti. Lze vidět, že rovnice (3.21) a (3.29) jsou si velmi podobné, protože jak bylo řečeno, Neo-Hookovský model je speciálním případem Mooney-Rivlinova modelu. Rovnice se liší pouze jedním členem a materiálovými konstantami, přičemž $C_{12} = C_1 + C_2$. Stejně je to i u rovnic korigovaného modulu objemové stlačitelnosti, protože ty vychází z rovnic změny vnitřního poloměru.

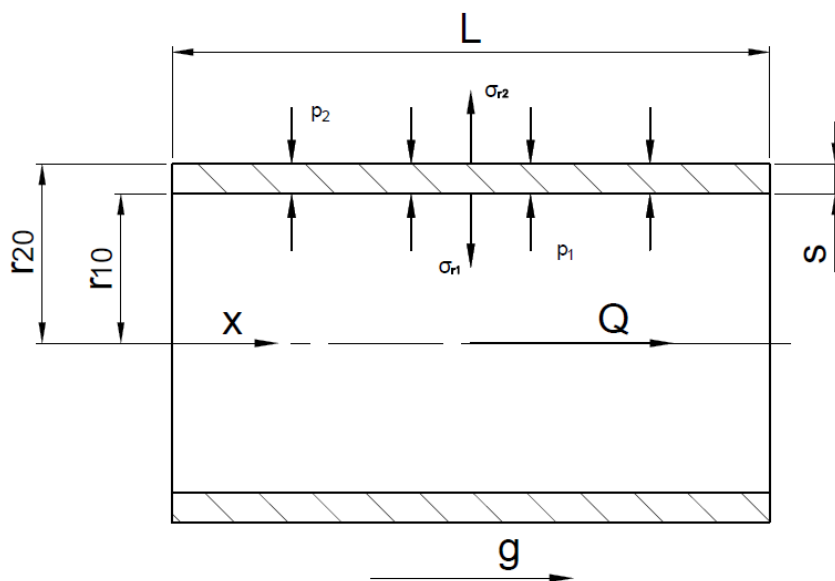
Kapitoly 2 a 3 vytvořily podstatný základ pro jednorozměrnou FSI simulaci deformovatelné trubice, která bude předmětem zájmu v zbývajících částech práce.

4 Jednorozměrná FSI simulace

FSI simulace je hojně používaným nástrojem při řešení situací, které obsahují interakci toku tekutiny s pohyblivým nebo elastickým tělesem. Jak bylo představeno v kapitole 2, mohou být od jednorozměrných po třírozměrné. V této kapitole bude realizována jednorozměrná FSI simulace toku kapaliny pružnou trubicí. Teoretický základ pro nadcházející simulaci byl probrán v kapitolách 2 a 3. Simulace se skládá z numerického řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. K řešení rovnic je použit výpočtový software Maple, který je dobře uzpůsoben k numerickému řešení soustav PDR.

4.1 Zadání

Hlavním prvkem simulace je trubice kruhového průřezu (obr. 4.1) o vnitřním poloměru r_{10} a tloušťkou stěny s . Materiálové konstanty jsou zvoleny pro silně elastický materiál. Je uvažováno, že trubice je zavěšena svisle, aby váha kapaliny neovlivňovala průhyb trubice. Dále se uvažuje, že se trubice nemůže deformovat axiálně, takže délka trubice je konstantní hodnota L . Naopak radiálně se deformuje bez omezení. Při výpočtech jsou pro trubici uvažovány pro porovnání dva materiálové modely, a to Neo-Hookovský a Mooney-Rivlinův.



Obrázek 4.1: Schéma trubice pro simulaci.

Kapalina je uvažována jako newtonská a protože je stlačitelnost kapaliny zanedbatelná oproti deformaci trubice, tak je hustota brána za konstantní hodnotu. Stlačitelnost kapaliny je ale zahrnuta v modulu objemové stlačitelnosti K . Tok kapaliny je na vstupu do trubice popsán hodnotami vstupní rychlosti a na výstupu je popsán hodnotami výstupního tlaku. Vstupní rychlost a výstupní tlak jsou tedy využity jako okrajové podmínky, které slouží jako vstupní hodnoty pro simulaci. Tyto hodnoty jsou popsány pomocí časově závislých funkcí a byly součástí zadání bakalářské práce. Konstantní hodnoty použité v simulaci jsou uvedeny v tabulce:

Tabulka 4.1: Konstantní hodnoty simulace

Hustota	$\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$
Délka trubice	$L = 0,7 \text{ m}$
Vnitřní průměr	$r_{10} = 6,35 \text{ mm}$
Stěna trubice	$s = 1,6 \text{ mm}$
Koeficient tření	$f_q = 0,062$
Materiálové konstanty	$C_{12} = 650 \text{ kPa}$ $C_1 = 600 \text{ kPa}$ $C_2 = 50 \text{ kPa}$
Modul objemové stlačitelnosti	$K = 2,1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

4.2 Návrh řešení

Jak bylo řečeno, simulace obsahuje řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Rovnice jsou tři a každá udává časovou závislost jedné proměnné. Tyto proměnné jsou rychlost v , tlak p a vnitřní poloměr r_1 . Soustava rovnic se skládá z:

1. Pohybové rovnice kapaliny (2.11), která udává změnu rychlosti v závislosti na čase.
2. Rovnice kontinuity (2.35), která udává změnu tlaku v závislosti na čase.
3. Neo-Hookeovské (3.21) nebo Mooney-Rivlinové (3.29) materiálové rovnice, která udává změnu poloměru v závislosti na čase.

Při definování pohybové rovnice (2.11) v softwaru Maple došlo k změně, protože člen obsahující parciální derivaci průřezu je obtížný určit, takže byl vynechán. Tím vznikla pohybová rovnice pro tuhou trubicí.

Nezbytnou součástí k řešení diferenciálních rovnic jsou okrajové a počáteční podmínky. Okrajovou podmínku na vstupu ($x = 0$) udává rychlost kapaliny dána funkcí v_{vstup} (obr. 4.2):

$$v(0, t) = v_{vstup} \quad (4.1)$$

Okrajová podmínka na výstupu z trubice ($x = L$) je definována funkcí tlaku p_{vstup} (obr. 4.3) s přispěním od hydrostatického tlaku a členu zahrnujícím ztráty :

$$p(L, t) = p_{vstup} + \rho g L - \frac{\rho f_q L}{4 r_1} v^2 = p_{vystup} + \rho g L \quad (4.2)$$

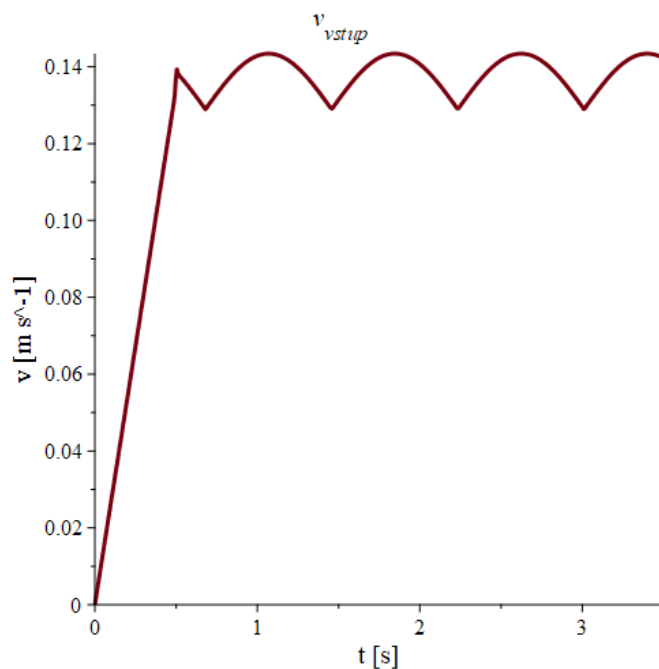
Počáteční podmínky udávají hodnotu proměnných při startu simulace ($t = 0$). Jsou tedy jedna pro každou proměnnou:

$$v(x, 0) = v_{vstup}(t = 0) \quad (4.3)$$

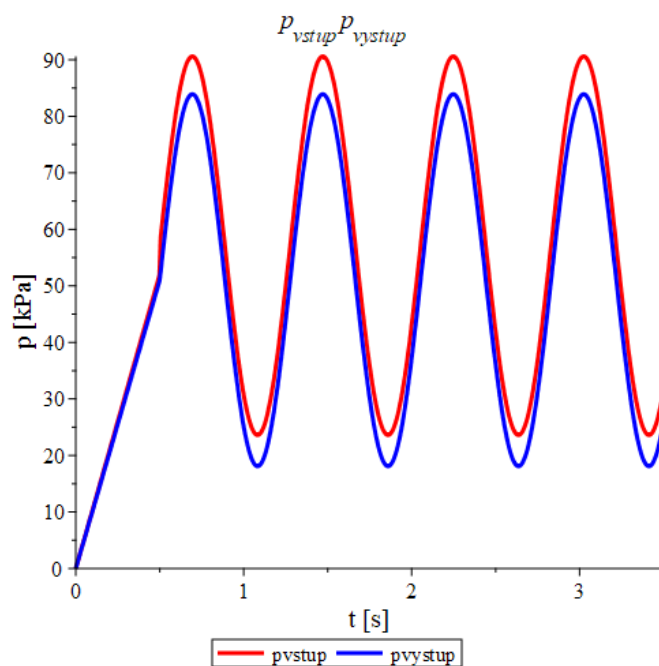
$$p(x, 0) = \rho g x - \frac{\rho f_q x}{4 r_{10}} v_0^2 + p_{vstup}(t = 0) = \rho g x - \frac{\rho f_q x}{4 r_{10}} v_0^2 \quad (4.4)$$

$$r_1(x, 0) = r_{10} \quad (4.5)$$

Tlak je uvažován jako relativní vůči okolnímu atmosférickému tlaku. Průřez trubice na počátku simulace je definovaný vztahem: $S_0 = \pi r_{10}^2$. Simulace je řešena v rozsahu $x = \langle 0, L \rangle$ a v čase $t = \langle 0, 3.5 \rangle$.



Obrázek 4.2: Graf rychlosti kapaliny na vstupu do trubice



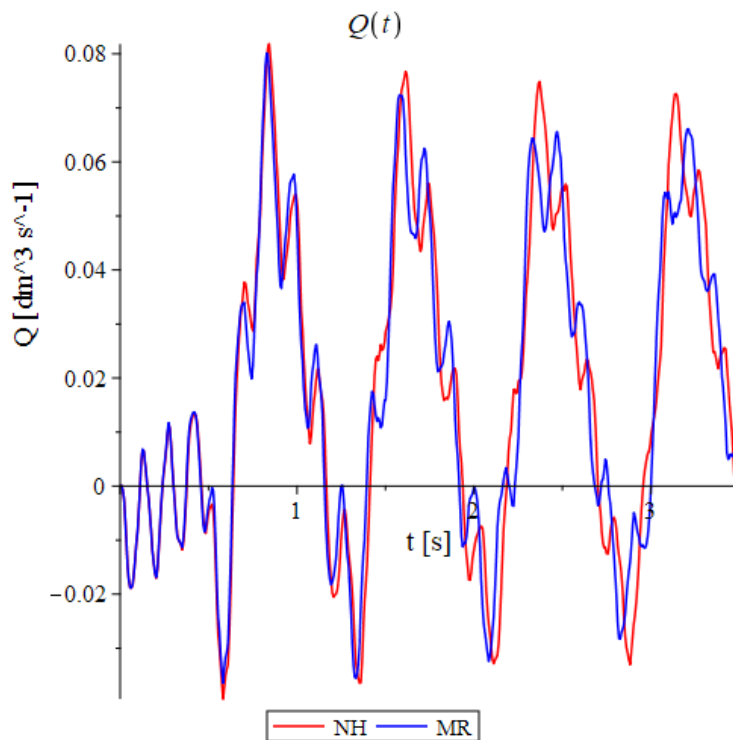
Obrázek 4.3: Graf tlaku na vstupu a výstupu z trubice

4.3 Výsledky

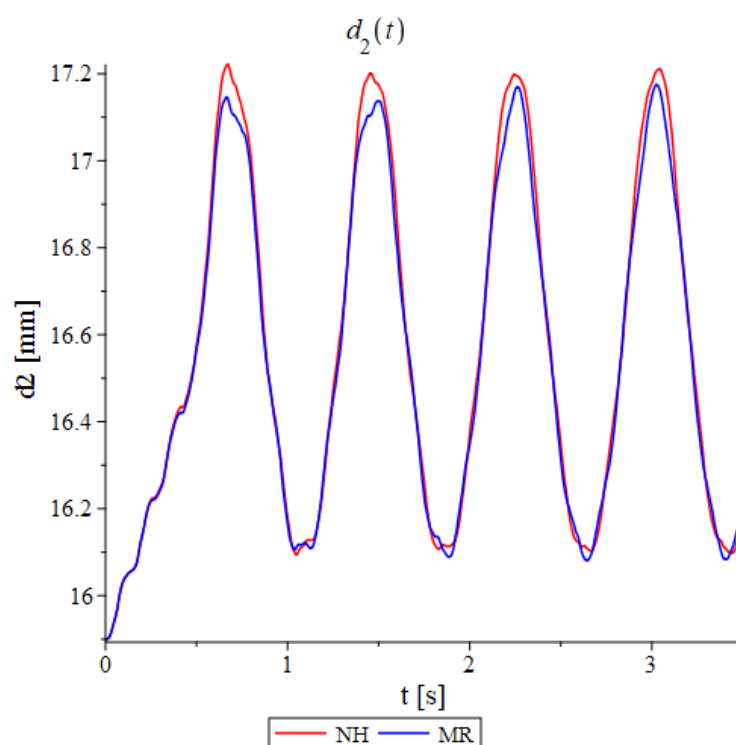
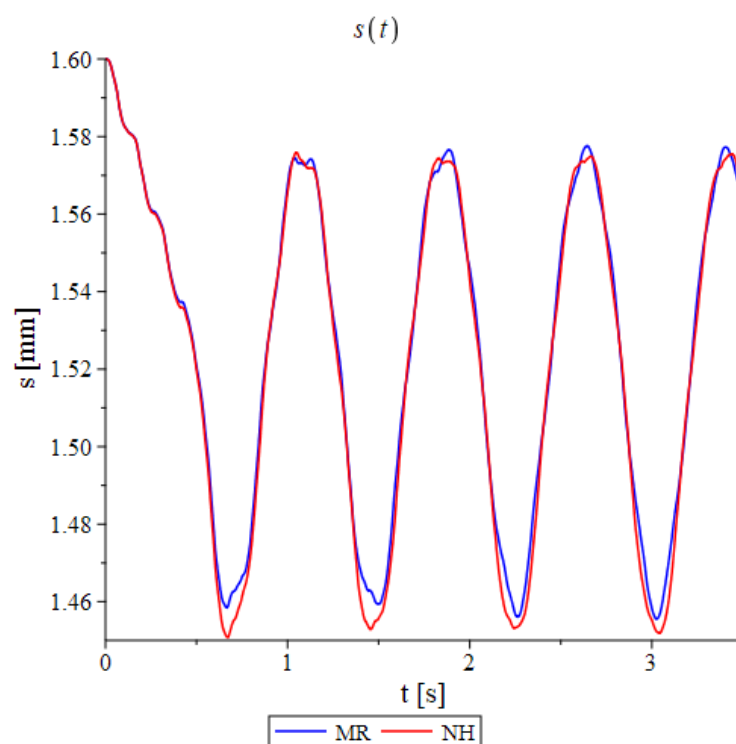
V předchozí sekci bylo uvedeno zadání a podklady pro zpracování FSI simulace. V této sekci budou ukázány výsledky této simulace. Všechny grafy ukazují hodnoty v polovině trubice, takže v místě $x = L/2$. V grafech jsou ukázány stěžeční veličiny: průtok, vnější průměr, tloušťka stěny, vnitřní tlak společně s radiálním napětím a na závěr tečné a axiální napětí.

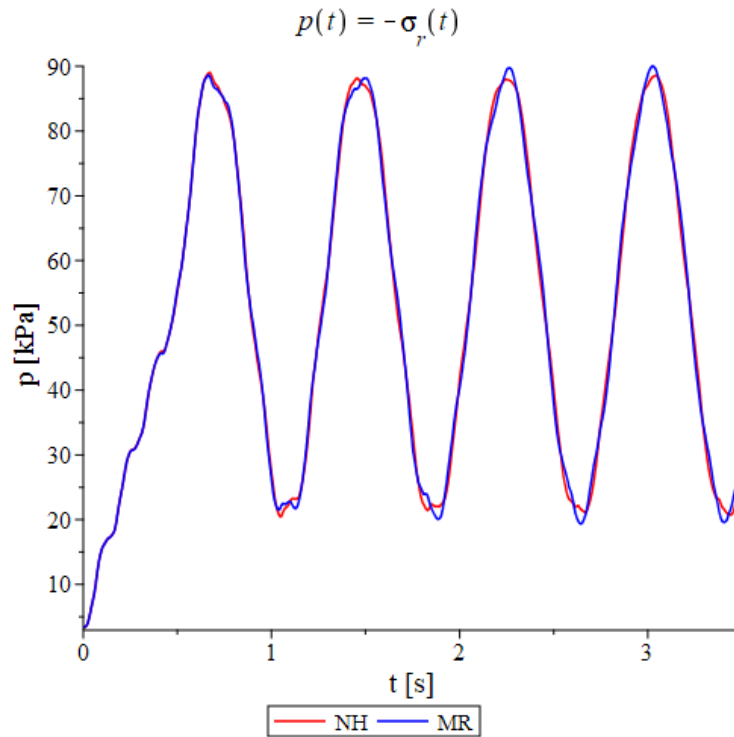
Lze si všimnout rozdílů mezi danými materiálovými modely, Neo-Hookovský model téměř ve všech případech vykazuje větší výchylky simulovaných veličin. Graf tlaku (obr. 4.7) je specifický, protože ukazuje dvě hodnoty. Kromě vnitřního tlaku p_1 také radiální napětí na vnitřním povrchu trubice σ_{r1} . Toto napětí má stejnou velikost jako vnitřní tlak, ale opačné znaménko, protože působí v opačném směru (viz obr. 4.1). σ_{r2} v grafu ukázána není, protože její hodnota je stejně velká jako vnější tlak p_2 , opět pouze s opačným znaménkem. Jak bylo ale řečeno, tlak je uvažován jako relativní vůči okolnímu atmosférickému tlaku, takže hodnota p_2 je rovno nule. Tím je samozřejmě i hodnota σ_{r2} rovna nule.

V grafu tečných napětí (4.8) lze vidět znatelný rozdíl mezi σ_{t1} a σ_{t2} s tím, že σ_{t1} dosahuje větších výchylek. To je primárně dáno rozdíly v tečném protažení λ_t na vnitřním a vnějším povrchu trubice. Při zvětšování poloměru trubice se zmenšuje tloušťka stěny s , a proto hodnota poloměru r_2 roste méně než r_1 . Tato interakce je dána podmínkou nestlačitelnosti materiálu (3.9). V rovnicích (3.18), nebo (3.27, 3.28) lze vidět, že k rozdílům tečných napětí ještě přispívá rozdíl axiálních napětí na vnitřním a vnějším poloměru trubice $\sigma_{a1,2}$ (obr. 4.9). V ideálním případě by měly být tyto hodnoty stejné, ale v simulaci rozdíly mezi nimi přesto vznikly. I tak jsou tyto rozdíly natolik malé, že se ve výpočtu tečného napětí téměř neprojeví.

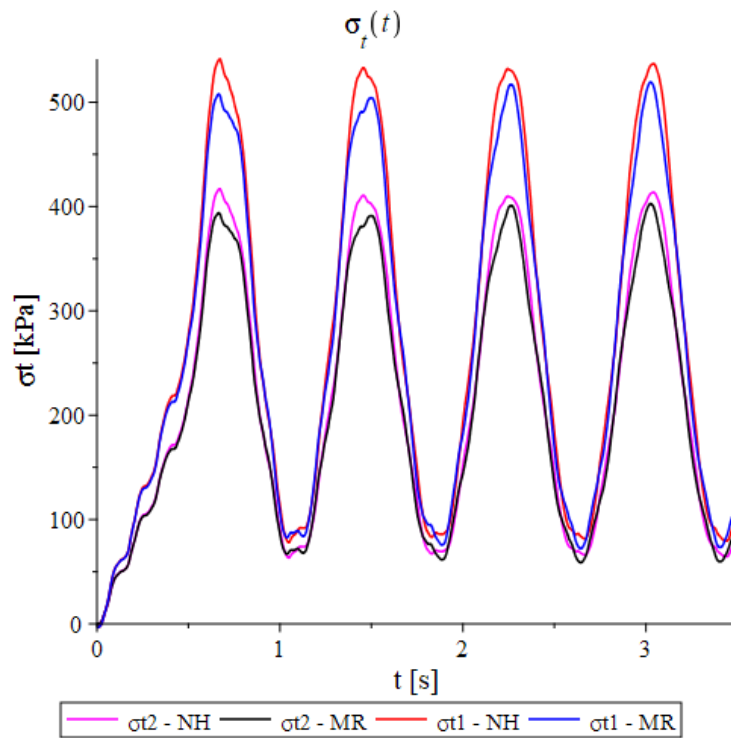


Obrázek 4.4: Graf průtoku.

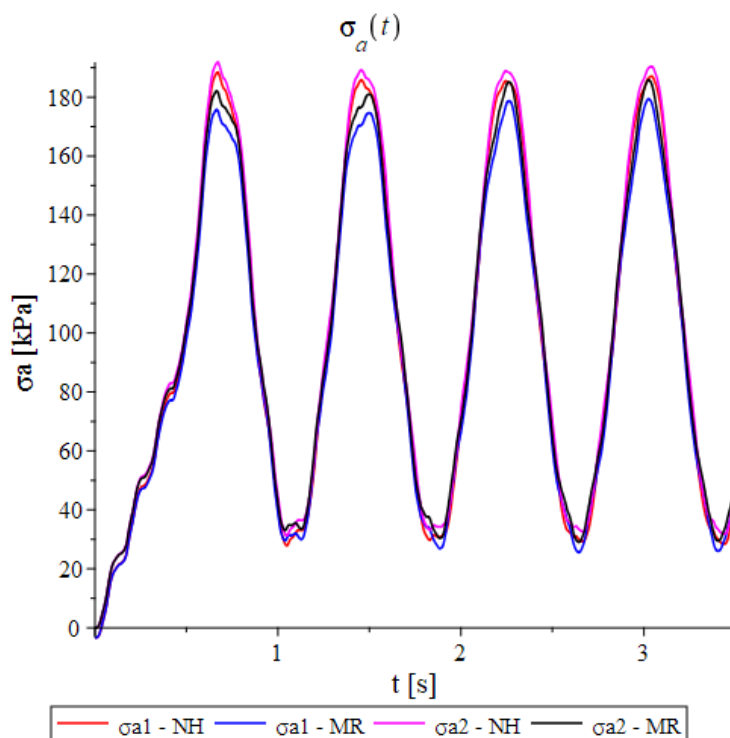
**Obrázek 4.5:** Graf vnějšího průměru.**Obrázek 4.6:** Graf tloušťky stěny.



Obrázek 4.7: Graf tlaku a záporné hodnoty radiálního napětí.



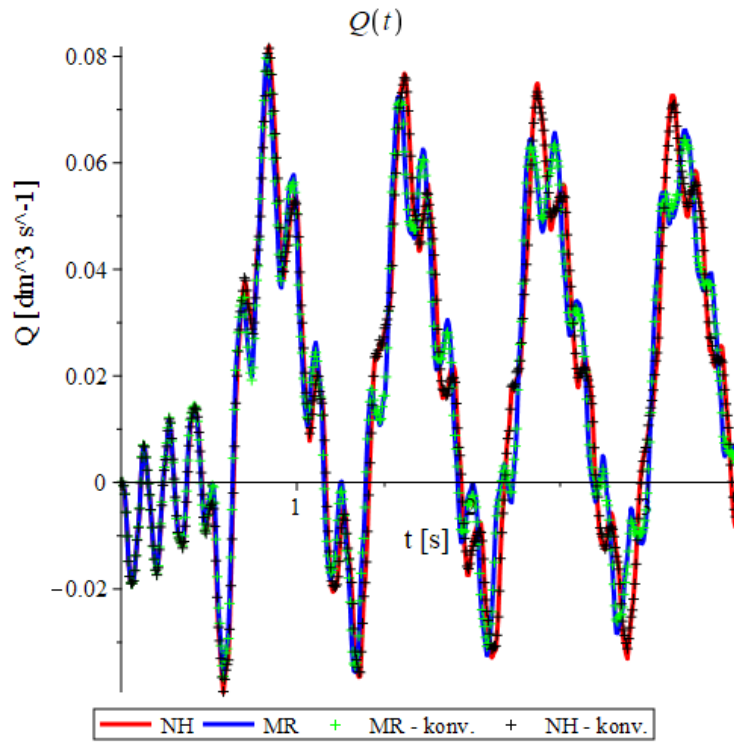
Obrázek 4.8: Graf tečného napětí.



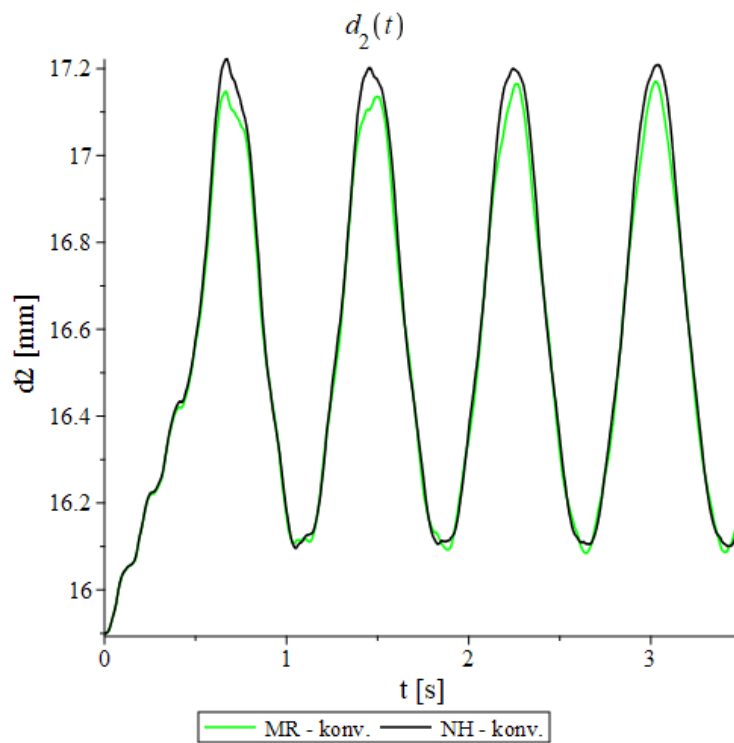
Obrázek 4.9: Graf axiálního napětí.

Protože simulace byla provedena s pohybovou rovnicí bez konvektivního členu ($v \frac{\partial v}{\partial x}$) (2.11), bude simulace provedena znovu tentokrát s pohybovou rovnicí tento člen obsahující (2.10) a výsledky budou porovnány, aby se zjistil vliv konvektivního členu při simulování výsledných hodnot.

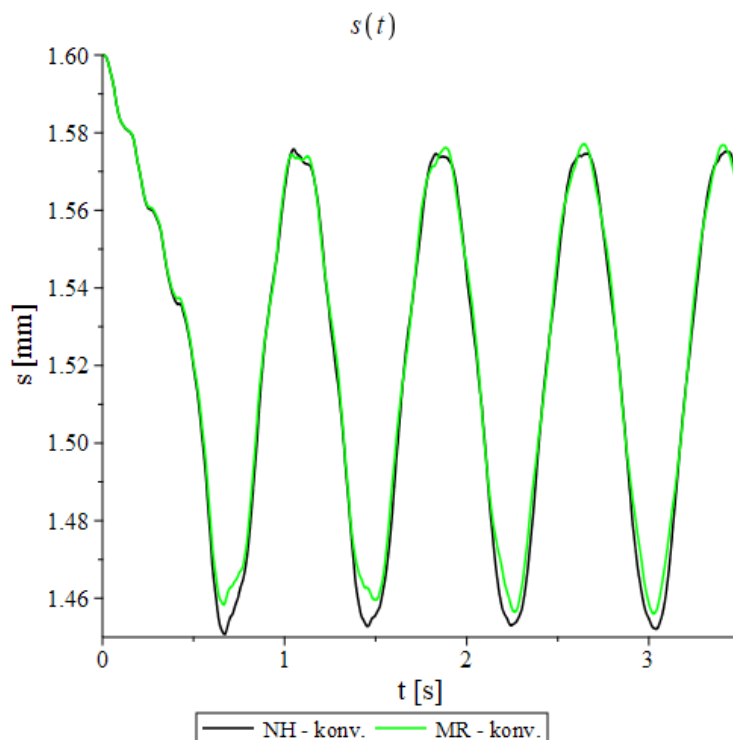
Na obrázcích 4.10 - 4.12 jsou představeny výsledky. Jak lze vidět v grafu porovnání průtoků, nebo spíše nelze vidět, hodnoty pro konvektivní model těsně korespondují s původním modelem simulace, a tak se jednotlivé křivky překrývají. Rozdíl v maximální hodnotě průtoku mezi původním modelem a modelem s konvektivním členem je pouze v řádu $10^{-4} \text{ dm}^3/\text{s}$, a to je opravdu zanedbatelná hodnota. Vliv konvektivního členu byl ověřen, protože v pružných trubicích je rychlost zvuku kapaliny natolik malá, že by mohla být výrazně menší než je rychlost proudění, a tím způsobit znatelné rozdíly. Jak se ale ukázalo, rychlost proudění je velmi malá, takže vliv konvektivního členu je zanedbatelný. Zbylé veličiny se změnily v podobném stylu, takže nemá smysl je ani představovat. Graf porovnání byl zvolen pouze pro průtok, u veličin průměru a tloušťky stěny se hodnoty obou modelů natolik shodují, že v grafech nelze vidět rozdíly, a proto jsou ukázány pouze pro konvektivní model. Z tohoto důvodu nejsou grafy napětí ukázány vůbec, protože nepřinášejí nic podstatného.



Obrázek 4.10: Graf průtoku. Porovnání modelu bez konvektivního členu s modelem zahrnujícím konvektivní člen.



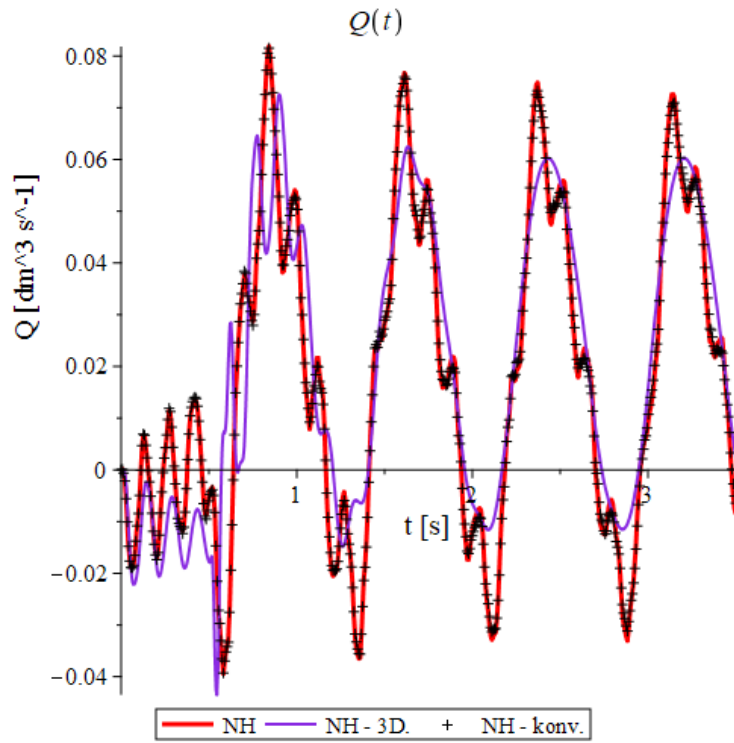
Obrázek 4.11: Graf vnějšího průměru. Model zahrnující konvektivní člen.



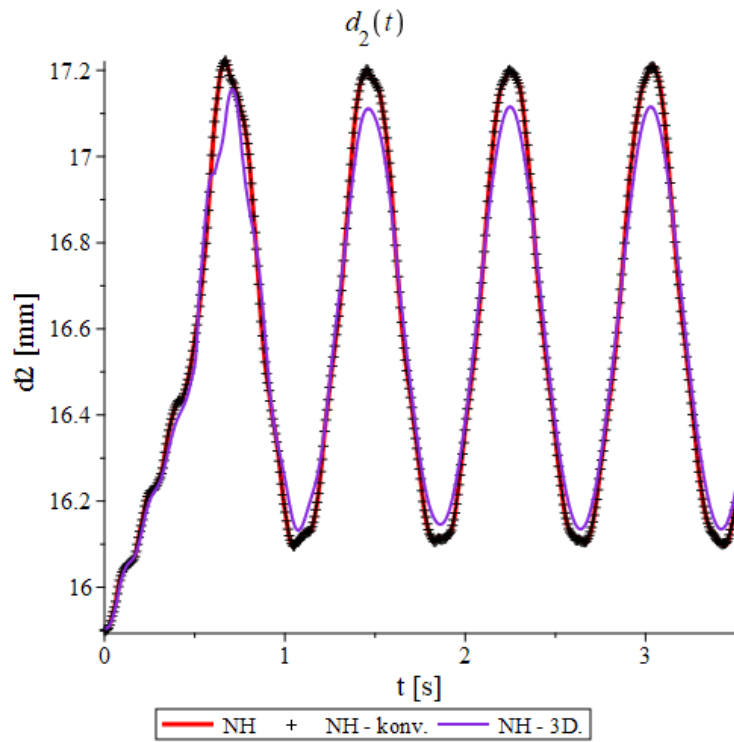
Obrázek 4.12: Graf tloušťky stěny. Model zahrnující konvektivní člen.

Na závěr budou pro ověření správnosti srovnány výsledky Neo-Hookovského materiálového modelu s třírozměrnou (3D) FSI simulací Neo-Hookovského modelu provedenou pomocí programu ANSYS. Hodnoty 3D simulace byly součástí zadání práce a její postup je popsán v [10]. Porovnání je představeno na obrázcích 4.13 - 4.15. Výsledky jsou ukázány pro průtok, vnější průměr trubice a tloušťku stěny trubice. Lze vidět, že 3D simulace u všech proměnných dosahuje menších výchylek hodnot než jednorozměrná simulace. Tyto rozdíly mohou být způsobeny vetknutím trubice na koncích při 3D simulaci, takže v místech vetknutí je trubice tuhá, a proto se v blízkém okolí konců chová jinak než při jednorozměrné simulaci. Tímto by měly být ovlivněny hodnoty v půlce trubice (hodnoty v grafech), otázkou je ale jak výrazně. Zároveň je 3D simulace velmi složitý proces, který je schopen simulovat úlohy mnohem přesněji, a proto hlavně u hodnot průtoku lze vidět určitou neshodu. Ta bude způsobena hlavně jednorozměrnou pohybovou rovnicí, která obsahuje zjednodušenou definici hydraulických ztrát. Dalším faktorem způsobujícím rozdíly může být popis okrajových podmínek.

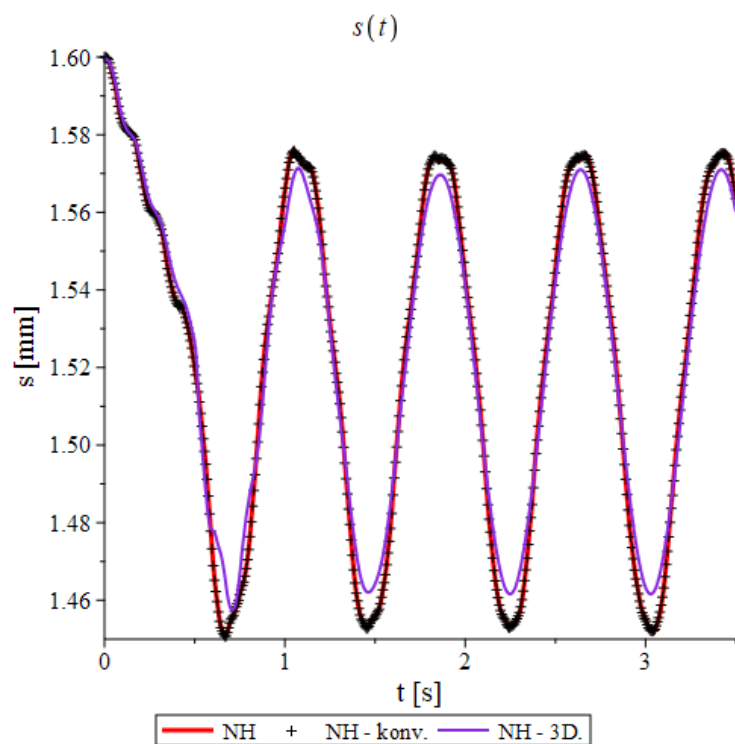
Z toho vyplývá, že určitá neshoda je očekávaná, a tak lze naopak tvrdit, že simulace spolu zejména v hodnotách průměru a tloušťky stěny trubice blízce korespondují. Takže jednorozměrná FSI simulace splnila svůj účel jako méně výpočtově a tím i časově náročná varianta přesnější třírozměrné FSI simulace.



Obrázek 4.13: Graf průtoku. Srovnání s 3D simulací.



Obrázek 4.14: Graf vnějšího průměru. Srovnání s 3D simulací.



Obrázek 4.15: Graf tloušťky stěny. Srovnání s 3D simulací.

Závěr

V této práci byly prvotně představeny případy výskytu proudění kapaliny pružnou trubicí. Významnou oblastí v této kategorii je biomechanika, a to hlavně proudění krve v cévách. V biomechanice se ještě pružné trubice vyskytují v podobě dýchacích cest, ty ale nebyly v této práci podrobněji zkoumány. Byl představen proces deformování cév, který byl vysvětlen na experimentu nazvaném Sterlingův rezistor a dále byl probrán způsob, kterým se šíří tlakové vlny v cévách.

Na to navazovala oblast problematiky proudění kapalin pružným potrubím, a to jak potrubím přenášející kapaliny na dlouhé vzdálenosti (např. ropovod), tak i potrubím menších rozměrů jako je třeba domovní instalace. V těchto systémech je nebezpečným jevem hydraulický ráz, který zatěžuje potrubí násobně více než samotné proudění dané kapaliny. Samotné proudění kapaliny potrubím ale způsobuje vibrace, které je také potřeba brát v potaz.

V další kapitole byla zmíněna existence různých verzí FSI simulace, zejména jednorozměrných a třírozměrných modelů. Následně byly definovány stěžejní rovnice pro jednorozměrný model FSI simulace, a to rovnice popisující proudění kapaliny v trubicí, v tomto případě jednorozměrná pohybová rovnice a rovnice kontinuity zohledňující deformaci stěny trubice.

Na to navazovalo představení konstitutivních materiálových modelů. Pro srovnání byl ukázán lineární Hookovský materiál, poté byly představeny stěžejní hyperelastické materiálové modely, a to Neo-Hookovský a Mooney-Rivlinův. Z těchto materiálových modelů byla definována pohybová rovnice trubice, která je zbývající potřebnou rovnicí pro realizování jednorozměrné FSI simulace. Nakonec byly definovány vztahy pro napětí ve stěně trubice.

Na závěr práce byla realizována jednorozměrná FSI simulace, která byla založena na numerickém řešení soustavy tří parciálních diferenciálních rovnic, které byly definované v předchozích částech této práce. Výstupem simulace byly časové závislosti pro průtok, průměr trubice, tloušťku stěny, tlak a napětí ve stěně trubice. Simulace byla provedena dvakrát, poprvé s jednorozměrnou pohybovou rovnicí zanedbávající konvektivní člen a poté s pohybovou rovnicí tento člen zahrnující. V tomto případě konvektivní člen nezpůsobil téměř žádný rozdíl ve výsledcích, protože rychlost kapaliny je velmi malá ve srovnání s rychlostí zvuku v trubicí. Dále bylo zjištěno, že Neo-Hookovský materiálový model dosahuje téměř výhradně větších výchylek simulovaných hodnot než Mooney-Rivlinův model. Radiální pohyb stěny trubice způsobuje fluktuace hodnot průtoku, tyto hodnoty v polovině délky trubice dosahují větších maximálních a minimálních výchylek oproti hodnotám na vstupu.

Posledním úkolem bylo porovnat výsledky jednorozměrné simulace pro Neo-Hookovský materiálový model s třírozměrnou FSI simulací. Zjistilo se, že i přes určitou neshodu, která byla očekávaná, se jednorozměrná simulace blíží hodnotami k 3D simulaci. Hlavně hodnoty průměru a tloušťky stěny trubice hezky korespondují s hodnotami 3D simulace.

Navázáním na tuto práci by mohlo být provedením vlastní třírozměrné FSI simulace využitím metody konečných objemů a metody konečných prvků a následným porovnáním výsledků se simulací jednorozměrného modelu. Další možností by samozřejmě bylo provedení experimentu, se kterým by se porovnaly jednotlivé typy FSI simulace a tím by bylo možné zjistit jejich přesnost.

Seznam použitých zdrojů

- [1] KOZUBKOVÁ, Milada, et al. Modelování proudění hydraulickým prvkem s pružnou stěnou a případnou kavitací-FSI analýza. *Výzkumná zpráva*, 2019.
- [2] GROTBERG, James B. a Oliver E. JENSEN. BIOFLUID MECHANICS IN FLEXIBLE TUBES. *Annual Review of Fluid Mechanics* [online]. 2004, 36(1), 121-147 [cit. 2020-10-14]. ISSN 0066-4189. Dostupné z: doi:10.1146/annurev.fluid.36.050802.121918.
- [3] SKALAK, R, N OZKAYA a T C SKALAK. Biofluid Mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics* [online]. 1989, 21(1), 167-200 [cit. 2020-10-17]. ISSN 0066-4189. Dostupné z: doi:10.1146/annurev.fl.21.010189.001123.
- [4] CARO, C.G. a T.J. PEDLEY. *The Mechanics of the circulation*. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1978. ISBN 0-19-263323-6.
- [5] LAROCK, Bruce E.; JEPPSON, Roland W.; WATTERS, Gary Z. *Hydraulics of pipeline systems*. CRC press, 1999. ISBN 0-8493-1806-8.
- [6] MORA-RODRÍGUEZ, Jesús, P. AMPARO LÓPEZ-JIMÉNEZ a Helena M. RAMOS. Intrusion and leakage in drinking systems induced by pressure variation. *Journal of Water Supply: Research and Technology-Aqua*[online]. 2012, 61(7), 387-402 [cit. 2020-12-15]. ISSN 0003-7214. Dostupné z: doi:10.2166/aqua.2012.044
- [7] PITTARD, Matthew T., Robert P. EVANS, R. Daniel MAYNES a Jonathan D. BLOTTER. Experimental and numerical investigation of turbulent flow induced pipe vibration in fully developed flow. *Review of Scientific Instruments*[online]. 2004, 75(7), 2393-2401 [cit. 2021-01-11]. ISSN 0034-6748. Dostupné z: doi:10.1063/1.1763256.
- [8] XIE, Fangfang, Xiaoning ZHENG, Michael S. TRIANTAFYLLOU, Yiannis CONSTANTINIDES a George Em KARNIADAKIS. The flow dynamics of the garden-hose instability. *The flow dynamics of the garden-hose instability. Journal of Fluid Mechanics*[online]. 2016, 800, 595-612 [cit. 2021-01-11]. ISSN 0022-1120. Dostupné z: doi:10.1017/jfm.2016.364.
- [9] ÇENGEL, Yunus A. a John M. CIMBALA. *Fluid mechanics: fundamentals and applications*. 4rd ed. New York: McGraw-Hill, 2018. ISBN 978-0-07-338032-2.
- [10] KLAS, Roman; FIALOVÁ, Simona. Pulse flow of liquid in flexible tube. In: *EPJ Web of Conferences*. EDP Sciences, 2019. p. 02041.
- [11] SHI, Yubing, Patricia LAWFORD a Rodney HOSE. Review of Zero-D and 1-D Models of Blood Flow in the Cardiovascular System. *BioMedical Engineering OnLine* [online]. 2011, 10(1) [cit. 2021-03-07]. ISSN 1475-925X. Dostupné z: doi:10.1186/1475-925X-10-33.
- [12] QUARTERONI, Alfio a Luca FORMAGGIA. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System*. 12. 2004. ISBN 9780444515667.

- [13] POCHYLÝ, František. *Dynamika tekutinových systémů*. [Praha]: Československá redakce VN MON, 1990. ISBN 80-214-0139-7.
- [14] RIVLIN, RSl. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1948, 240.822: 459-490.
- [15] MOONEY, Melvin. A theory of large elastic deformation. *Journal of applied physics*, 1940, 11.9: 582-592.

Seznam použitých zkratek a symbolů

Symbol	Význam	Jednotka
a	Zrychlení	$[\text{m/s}^2]$
b	Součinitel třecích sil	$[\text{kg/m}^2 \text{ s}]$
c	Rychlost zvuku	$[\text{m/s}]$
C	Kapacita	$[\text{F}]$
C_{ij}	Materiálová konstanta	-
c_t	Teoretická rychlost zvuku	$[\text{m/s}]$
d	Průměr potrubí	$[\text{m}]$
E	Modul pružnosti v tahu	$[\text{Pa}]$
f_q	Koeficient tření	-
g	Gravitační zrychlení	$[\text{m/s}^2]$
H	Výška vodního sloupce	$[\text{m}]$
k	Konstanta pružnosti potrubí	-
K	Modul objemové stlačitelnosti	$[\text{Pa}]$
K_c	Korigovaný modul objemové stlačitelnosti	$[\text{Pa}]$
K_r	Parametr tření kapaliny	$[\text{m}^2/\text{s}]$
l	Charakteristický rozměr	$[\text{m}]$
L	Indukčnost	$[\text{H}]$
L_p	Délka potrubí	$[\text{m}]$
m_j	Vektor vnější normály k trubici	-
n	Jednotkový normálový vektor	-
p	Tlak	$[\text{Pa}]$
Q	Průtok	$[\text{m}^3/\text{s}]$
r	Poloměr	$[\text{m}]$
R	Odpor	$[\Omega]$
Re	Reynoldsovo číslo	-
s	Tloušťka stěny potrubí	$[\text{m}]$
S	Obsah	$[\text{m}^2]$
t	Čas	$[\text{s}]$
T_r	Doba návratu vlny	$[\text{s}]$
T_s	Doba zavírání ventilu	$[\text{s}]$
v	Rychlost	$[\text{m/s}]$
V	Objem	$[\text{m}^3]$
v_{ij}	Tenzor rychlosti deformace	-
w_{ij}	Pomocný tenzor	-
x	Poloha	$[\text{m}]$
α	Coriolisův koeficient	-
ε	Relativní prodloužení	-
λ	Protažení	-
μ	Poissonovo číslo	-
ν	Kinematická viskozita	$[\text{m}^2/\text{s}]$
ρ	Hustota	$[\text{kg/m}^3]$

Symbol	Význam	Jednotka
σ	Napětí	[Pa]
Σ_{ij}	Tenzor napětí	-
ξ	Rychlostní profil toku	-
∇	Nabla	
P	Plášť trubice	
FSI	Fluid-structure interaction	
PDR	Parciální diferenciální rovnice	
PVC	Polyvinylchlorid	

Příloha: Maple kód

```

> with(plots) :
> pnula := 998.2 : L := 0.7 : fr := 1.2875 : Qnula := 0.00002475 : r1nula :=  $\frac{0.0127}{2}$  :
    r2nula :=  $\frac{0.0159}{2}$  : g := 9.81 : λ := 0.062 : Snula := π·r1nula·r1nula : Cmat12 :=
    0.65E6 : Cmat1 := 0.6E6 : Cmat2 := 0.05E6 : K := 2.1E9 : S(x, t) := π·r1(x, t)·r1(x, t) :
> b(x, t) :=  $\frac{pnula}{4·r1(x, t)} · λ · v(x, t)$  :
> pv2 :=  $\begin{cases} 102000.0·t & t < 0.5 \\ 151000 + 32913.5195·\sin(fr·2·π·t + 2.24) - 100000 & t \geq 0.5 \end{cases}$  : pv1 :=
     $\begin{cases} 104200.0·t & t < 0.5 \\ 157100 + 33500·\sin(fr·2·π·t + 2.24) - 100000 & t \geq 0.5 \end{cases}$  :
> Qvstup :=  $\begin{cases} \frac{2.55468E-05·t}{0.5} & t < 0.5 \\ 0.0000245 + 0.00000275·|\sin(π·fr·t + 3.55·0.11)| & t \geq 0.5 \end{cases}$  :
> Neo — Hookean. materiálové rovnice :
> λa1(x, t) := 1 : λr1(x, t) :=  $\frac{1}{λt1(x, t)}$  :
> σr1(x, t) := σa1(x, t) + 2·Cmat12·(λr1(x, t)2 - λa1(x, t)2) :
> σa1(x, t) := -p(x, t) - 2·Cmat12·(λr1(x, t)2 - λa1(x, t)2) :
> σt1(x, t) := σa1(x, t) + 2·Cmat12·(λt1(x, t)2 - λa1(x, t)2) :
> λa2(x, t) := 1 : λr2(x, t) :=  $\frac{1}{λt2(x, t)}$  :
> σr2(x, t) := σa2(x, t) + 2·Cmat12·(λr2(x, t)2 - λa2(x, t)2) :
> σa2(x, t) := 0 + 2·Cmat12·(λa2(x, t)2 - λr2(x, t)2) :
> σt2(x, t) := σa2(x, t) + 2·Cmat12·(λt2(x, t)2 - λa2(x, t)2) :
> λt1(x, t) :=  $\frac{r1(x, t)}{r1nula}$  : λt2(x, t) :=  $\frac{r2(x, t)}{r2nula}$  :
> Mooney — Rivlin. materiálové rovnice :
> σr1_MR(x, t) = σa1_MR(x, t) + 2·Cmat1·(λr1(x, t)2 - λa1(x, t)2) - 2·Cmat2· $\left(\frac{1}{λr1(x, t)^2} - \frac{1}{λa1(x, t)^2}\right)$  :
> σa1_MR(x, t) := -p(x, t) + 2·Cmat1· $\left(1 - \frac{r1nula^2}{r1(x, t)^2}\right)$  - 2·Cmat2· $\left(1 - \frac{r1(x, t)^2}{r1nula^2}\right)$  :
> σt1_MR(x, t) := σa1_MR(x, t) + 2·Cmat1· $\left(\frac{r1(x, t)^2}{r1nula^2} - 1\right)$  - 2·Cmat2· $\left(\frac{r1nula^2}{r1(x, t)^2} - 1\right)$  :

```

```

>  $\sigma_{r2\_MR}(x, t) = \sigma_{a2\_MR}(x, t) + 2 \cdot C_{mat1} \cdot (\lambda r2(x, t)^2 - \lambda a2(x, t)^2) - 2 \cdot C_{mat2} \cdot \left( \frac{1}{\lambda r2(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a2(x, t)^2} \right) :$ 
=
>  $\sigma_{a2\_MR}(x, t) := 2 \cdot C_{mat1} \cdot \left( 1 - \frac{r2nula^2}{r2(x, t)^2} \right) - 2 \cdot C_{mat2} \cdot \left( 1 - \frac{r2(x, t)^2}{r2nula^2} \right) :$ 
=
>  $\sigma_{t2\_MR}(x, t) := \sigma_{a2\_MR}(x, t) + 2 \cdot C_{mat1} \cdot \left( \frac{r2(x, t)^2}{r2nula^2} - 1 \right) - 2 \cdot C_{mat2} \cdot \left( \frac{r2nula^2}{r2(x, t)^2} - 1 \right) :$ 
=
>  $r2(x, t) := \left| \sqrt{r1(x, t) \cdot r1(x, t) + (r2nula^2 - r1nula^2)} \right| :$ 
> Neo – Hookean :
>  $Ar\_nh(x, t) := \frac{1}{4 \cdot r1(x, t) \cdot C_{mat12} \cdot \left( \frac{r1nula^2}{r1(x, t)^4} - \frac{r2nula^2}{r2(x, t)^4} \right)} :$ 
=
>  $Kc\_nh(x, t) := \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{2}{r1(x, t)} \cdot Ar\_nh(x, t)} :$ 
=
> Mooney – Rivlin :
>  $Ar\_mr(x, t) := \frac{1}{4 \cdot r1(x, t) \cdot \left( C_{mat1} \cdot \left( \frac{r1nula^2}{r1(x, t)^4} - \frac{r2nula^2}{r2(x, t)^4} \right) + C_{mat2} \cdot \left( \frac{1}{r1nula^2} - \frac{1}{r2nula^2} \right) \right)} :$ 
=
>  $Kc\_mr(x, t) := \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{2}{r1(x, t)} \cdot Ar\_mr(x, t)} :$ 
=
>  $IBC := \left\{ p(L, t) = pv2 + \rho nula \cdot g \cdot L, v(0, t) = \frac{Q_{vstup}}{Snula \cdot 1.5}, p(x, 0) = pv1 \right\}_{t=0} - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} + \frac{Q_{nula} \cdot Q_{nula}}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x, v(x, 0) = 0, r1(x, 0) = r1nula \Big\} :$ 
=
> Neo – Hookean. pde's :
>  $sys\_prutokova\_rovnice\_NH := \left[ \frac{\partial}{\partial t} (v(x, t)) = -\frac{1}{\rho nula} \cdot \left( b(x, t) \cdot v(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (p(x, t)) \right) + g, \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t)) = -Kc\_nh(x, t) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)) + \frac{v(x, t)}{K} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (p(x, t)) \right), \frac{\partial}{\partial t} (r1(x, t)) = Ar\_nh(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t)) \right] :$ 
=
>  $prikaz\_sys\_prutokova\_rovnice\_NH := pdsolve(sys\_prutokova\_rovnice\_NH, IBC, numeric, time = t, range = 0 .. L, spacestep = \frac{1}{100}, timestep = \frac{1}{100}) ;$ 
=
> Neo – Hookean. pde's konvektivní :

```

```

> sys_prutokova_rovnice_konv_NH := [  $\frac{\partial}{\partial t} (v(x, t)) = -\frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)) \cdot v(x, t) - \frac{1}{\rho nula} \cdot \left( b(x, t) \cdot v(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (p(x, t)) \right) + g, \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t)) = -Kc\_nh(x, t) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)) + \frac{v(x, t)}{K} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (p(x, t)) \right), \frac{\partial}{\partial t} (rI(x, t)) = Ar\_nh(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t)) \right] :
=
> prikaz_sys_prutokova_rovnice_konv_NH := pdsolve(sys_prutokova_rovnice_konv_NH, IBC,
numeric, time = t, range = 0..L, spacestep =  $\frac{1}{100}$ , timestep =  $\frac{1}{100}$ );
=
> Mooney – Rivlin. pde's :
> sys_prutokova_rovnice_MR := [  $\frac{\partial}{\partial t} (v(x, t)) = -\frac{1}{\rho nula} \cdot \left( b(x, t) \cdot v(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (p(x, t)) \right) + g, \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t)) = -Kc\_mr(x, t) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)) + \frac{v(x, t)}{K} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (p(x, t)) \right), \frac{\partial}{\partial t} (rI(x, t)) = Ar\_mr(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t)) \right] :
=
> prikaz_sys_prutokova_rovnice_MR := pdsolve(sys_prutokova_rovnice_MR, IBC, numeric, time
= t, range = 0..L, spacestep =  $\frac{1}{100}$ , timestep =  $\frac{1}{100}$ );
=
> Mooney – Rivlin. pde's konvektivní :
> sys_prutokova_rovnice_konv_MR := [  $\frac{\partial}{\partial t} (v(x, t)) = -\frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)) \cdot v(x, t) - \frac{1}{\rho nula} \cdot \left( b(x, t) \cdot v(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (p(x, t)) \right) + g, \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t)) = -Kc\_mr(x, t) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)) + \frac{v(x, t)}{K} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (p(x, t)) \right), \frac{\partial}{\partial t} (rI(x, t)) = Ar\_mr(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t)) \right] :
=
> prikaz_sys_prutokova_rovnice_konv_MR := pdsolve(sys_prutokova_rovnice_konv_MR, IBC,
numeric, time = t, range = 0..L, spacestep =  $\frac{1}{100}$ , timestep =  $\frac{1}{100}$ );
=
> příklad generování grafů :
> grafQ_NH := prikaz_sys_prutokova_rovnice_NH:-plot( $v(x, t) \cdot S(x, t) \cdot 1000$ ,  $x = \frac{L}{2}$ ,  $t = 0..3.5$ ,
numpoints = 500, color = red, thickness = 3, title =  $Q(t)$ , titlefont = ["ROMAN", 15], labels
= ["t [s]", "Q [dm3 s-1]", legend = ["NH"], labelfont = ["ROMAN", 15], labeldirections
= ["horizontal", "vertical"]):$$$ 
```